УДК 514.142

Ю. С. Резникова
(НИИ труда и занятости населения М-ва труда и соц. политики Украины и НАН Украины)

СРЕДИННО-УСЕЧЕННЫЕ СИМПЛЕКСЫ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We present the general geometric description and the Euler – Poincare characteristics of middle-sectioned simplexes in the four-dimensional affine space. We demonstrate the relation between such geometrical objects and four-dimensional analogs of the triangular Serpinski napkin.

Наведено загальний геометричний опис, а також характеристики Ейлера – Пуанкаре серединно-зрізаних симплексів у чотиривимірному афінному просторі. Продемонстровано зв'язок подібних геометричних об'єктів із чотиривимірними аналогами трикутної серветки Серпінського.

1. Введение. При попытке аналитико-геометрического описания каркасов Серпинского, представляющих собой многомерные аналоги треугольной салфетки Серпинского, в аффинных пространствах размерности четыре и выше было обнаружено существование типа выпуклых многогранников, описание которого ранее автору не встречалось [1, 2]. Поскольку подобные геометрические объекты, названные срединно-усеченными симплексами*, представляют интерес как с точки зрения многомерной геометрии непосредственно, так и фрактального анализа, исследование их основных характеристик претендует на роль самостоятельной задачи.

Настоящая работа посвящена исследованиям срединно-усеченных симплексов в четырехмерном аффинном пространстве. Целью работы является как предоставление полного описания внутренней геометрической структуры, однозначно идентифицирующего подобные объекты, так и демонстрация связи рассматриваемых многогранников с четырехмерными каркасами Серпинского.

2. Срединно-усеченный симплекс в четырехмерном аффинном пространстве.

Определение. *Срединно-усеченным симплексом в четырехмерном аффинном пространстве* $({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4)$ *называется четырехмерный многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку десяти точек (вершин срединно-усеченного симплекса), являющихся серединами* 1*-граней произвольного четырехмерного симплекса.*

Утверждение (о четырехмерном срединно-усеченном симплексе). *Четырехмерный срединно-усеченный симплекс является выпуклым многогранником,* 3*-грани которого представлены равным количеством многогранников двух типов, а именно*:

симплексами (тетраэдрами);

срединно-усеченными симплексами (*октаэдрами*).

При этом количество i*-граней четырехмерного срединно-усеченного симплекса равно*: $N_0({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 10$, $N_1({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 30$, $N_2({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 30$, $N_3({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 10$ *соответственно.*

Доказательство. Процедура построения срединно-усеченного симплекса в четырехмерном аффинном пространстве может быть описана следующим образом. Разобьем произвольный четырехмерный симплекс $(\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4)$ пятью средними гиперплоскостями, проходящими через середины его ребер параллельно основаниям. При этом образуются пять конгруэнтных симплексов около вершин исходного (далее — привершинные симплексы), а также центральный многогранник, являющийся срединно-усеченным симплексом по построению (рис. 1).

* В дву- и трехмерных аффинных пространствах срединно-усеченные симплексы представляют собой соответственно треугольники и октаэдры.

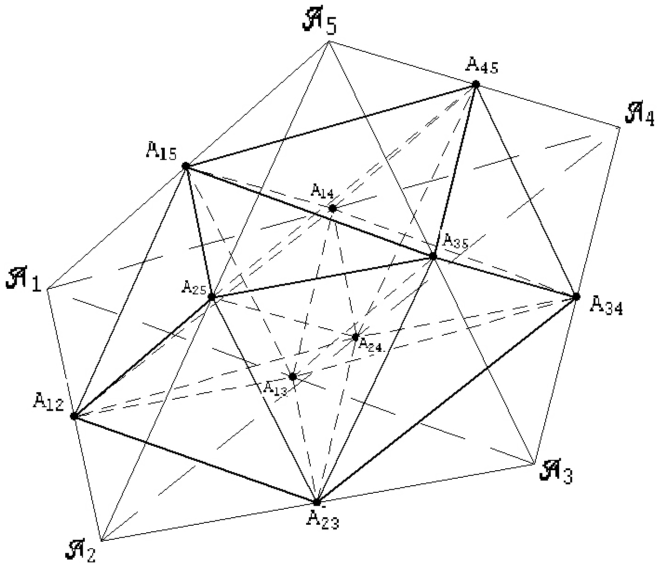


Рис. 1. Граф срединно-усеченного симплекса ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$, вписанного в изначальный $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$.

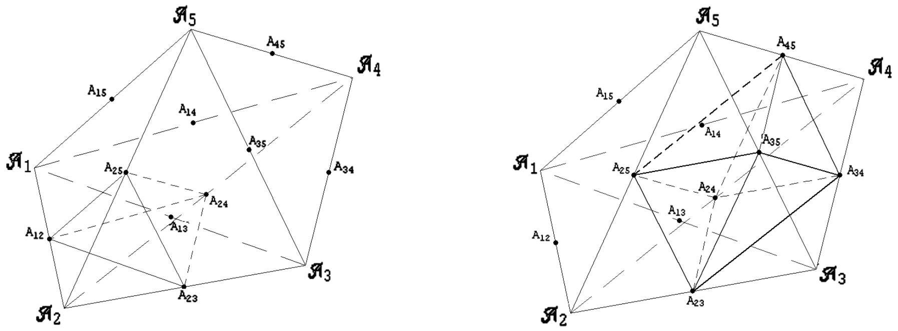
Из геометрической структуры ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ следует, что его 3-грани представлены равным количеством многогранников двух типов, а именно:

пятью симплексами $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$ (тетраэдрами), являющимися основаниями привершинных симплексов;

пятью срединно-усеченными симплексами ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$ (октаэдрами), представляющими собой центральные многогранники 3-граней исходного симплекса.

Таким образом, $N_3({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 10$.

На рис. 2 представлены графы 3-граней обоих указанных типов: симплекс $A_{12}A_{23}A_{25}A_{24}$ (*а*) и октаэдр $\mathrm{A}_{23}A_{24}A_{25}A_{34}A_{35}A_{45}$ (*б*), вписанные для лучшего визуального восприятия в изначальный $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$.



а б

Рис. 2. Примеры 3-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ первого (*а*) и второго (*б*) типов соответственно.

В дальнейшем при последовательном переходе от i-граней к $(i-1)$-граням многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ с целью корректного подсчета количества последних в качестве первых рассматриваются только многогранники типа ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}$ во избежание учета $(i-1)$-граней оснований привершинных симплексов более чем единожды.

Согласно изложенному, для подсчета количества 2-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ необходимо определить количество 2-граней пяти многогранников ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$ с учетом внутренней структуры исследуемого геометрического объекта:

$N_2({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4)$ = [общее количество многогранников ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$] $\times$ [количество 2-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$ с учетом внутренней структуры многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$] = [общее количество многогранников ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$] $\times$ [количество 2-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$, которые являются симплексами $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$ + + (количество 2-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_3$, которые являются многогранниками ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$)/2] $= 5 \cdot \left(4 + \frac{4}{2}\right) = 30$.

Тридцать 2-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ представлены двадцатью симплексами $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$, которые согласно приведенной выше методике в дальнейшем подсчете i-граней не учитываются, и десятью многогранниками ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$.

Заметим, что на данном этапе и $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$, и ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$ представляют собой треугольники. Таким образом, для подсчета 1-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ необходимо определить количество 1-граней десяти треугольников ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_2$: $N_1({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = 30$.

Количество вершин (0-граней) многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ совпадает с количеством ребер изначального симплекса $\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$, в который он вписан, по определению: $N_0({}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = r(\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4) = C_5^2 = 10$.

Результаты подсчета i-граней многогранника ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$ (рис. 3) представлены в следующей таблице.

Четырехмерный срединно-усеченный симплекс	N_0	N_1	N_2	N_3
${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$	10	30	30	10

Как известно, в случае выпуклых многогранников произвольной размерности n $(n \geq 2)$ справедлива формула Эйлера – Пуанкаре [1, с. 512; 3, с. 182], согласно которой

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \cdot N_i = 1 + (-1)^{n-1},$$

где N_i — количество i-граней.

Покажем, что для четырехмерного срединно-усеченного симплекса, описанного выше, формула Эйлера – Пуанкаре действительно выполняется:

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \cdot N_i = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 10 - 30 + 30 - 10 = 0.$$

Утверждение доказано.

Утверждение о четырехмерном срединно-усеченном симплексе предоставляет полное описание внутренней геометрической структуры, однозначно идентифицирующее рассматриваемые объекты.

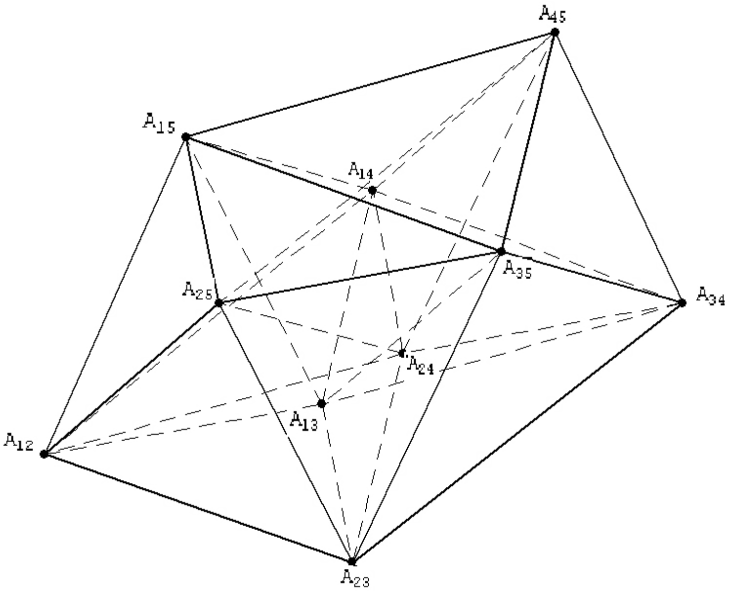


Рис. 3. Граф срединно-усеченного симплекса ${}_{ms}\widetilde{\mathrm{Simp}}_4$.

Следствие (о дуальном к четырехмерному срединно-усеченному симплексу многограннике). *Дуальным к четырехмерному срединно-усеченному симплексу является четырехмерный срединно-усеченный симплекс.*

В данном контексте под дуальностью понимается полярность относительно ρ-сферы $S_\rho = \{\vec{x} \in V^4(\mathfrak{R}) \colon \rho(\vec{x}) = c\}$, $c = \mathrm{const} > 0$, в метрическом пространстве $\{V^4(\mathfrak{R}), \rho\}$, где ρ — некоторая фиксированная метрика.

3. Каркас Серпинского в четырехмерном аффинном пространстве. *Каркасом Серпинского* в четырехмерном аффинном пространстве называется фрактальное множество, являющееся аналогом треугольной салфетки Серпинского на плоскости.

Согласно изначальному подходу к описанию треугольной салфетки Серпинского с помощью геометрической процедуры исключений [4, с. 33], четырехмерный каркас Серпинского также можно определить схожим геометрически-описательным способом.

Процедура построения четырехмерного каркаса Серпинского. Разобьем произвольный четырехмерный заполненный симплекс пятью средними гиперплоскостями, проходящими через середины его ребер параллельно основаниям. При этом образуются пять конгруэнтных заполненных симплексов около вершин исходного, а также центральный телесный многогранник [5, с. 13], внутренность которого исключается. Далее выполним аналогичную процедуру с каждым из пяти оставшихся заполненных симплексов. Продолжая подобный процесс бесконечно, получаем фигуру, которая является *четырехмерным каркасом Серпинского* $(S\mathrm{Car}^{(4)})$ по построению.

$S\mathrm{Car}^{(4)}$ является довольно сложной пространственной линией, имеющей свойство самоподобия: состоит из пяти конгруэнтных и подобных всей кривой частей с коэффициентом подобия $1/2$.

Исходя из того, что размерность Хаусдорфа – Безиковича ограниченных замкнутых СП-множеств, каковым и является фрактальное множество $S\mathrm{Car}^{(4)}$, совпадает с СП-размерностью [6, с. 61], получаем следующее значение размерности Хаусдорфа – Безиковича: $\alpha_0(S\mathrm{Car}^{(4)}) = \log_2 5$.

В процессе исследования четырехмерного каркаса Серпинского с целью предоставления аналитико-геометрического описания** естественным образом возникают вопросы, связанные с исключаемыми фигурами процедуры построения.

Очевидно, что на первом этапе построения фрактального множества $S\mathrm{Car}^{(4)}$ исключаемая фигура представляет собой внутренность четырехмерного заполненного срединно-усеченного симплекса. Учитывая самоподобие рассматриваемого фрактального множества, очевидно также, что на последующих этапах в качестве исключаемых множеств используются объединения внутренностей соответствующих телесных многогранников ${}_{ms}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{imp}_4$. На основании изложенного имеет место следующее утверждение.

Утверждение. *Фрактальное множество* $S\mathrm{Car}^{(4)}$ *может рассматриваться как результат бесконечной дискретной процедуры* (*согласно принципам, изложенным выше*), *на каждом* l-*м*, $l \geq 1$, *этапе которой исключается множество, представляющее собой объединение внутренностей* 5^{l-1} *четырехмерных заполненных срединно-усеченных симплексов с коэффициентом подобия* $1/2^{l-1}$ *относительно первого этапа построения.*

1. *Берже М.* Геометрия: В 2 т. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.
2. *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
3. *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 212 с.
4. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.
5. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.
6. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1998. – 298 с.
7. *Резникова Ю. С.* Аналитико-геометрическое описание ковра Серпинского и его трехмерного аналога в терминах модуля Галицына // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 5. – С. 207 – 216.

Получено 08.04.2005,
после доработки — 21.06.2006

** В дву- и трехмерных аффинных пространствах упомянутая задача вполне разрешима в терминах модуля Галицына [7].