УДК 517.942

И. С. Кац (Одес. нац. акад. пищ. технологий)

О ПРИРОДЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ДЕ БРАНЖА*

We prove the theorem announced by the author in 1995 in the paper "Criterion for discreteness of spectrum of singular canonical system" (*Functional Analysis and Its Applications,* Vol. 29, No. 3).

In developing the theory of Hilbert spaces of entire functions (we call them the Krein – de Branges spaces or, briefly, K-B spaces), L. de Branges arrived at some class of canonical equations of phase dimension 2. He proved that, for any given K-B space, there exists a canonical equation of the considered class such that it restores the chain of included K-B spaces. The Hamiltonians of such canonical equations are called the de Branges Hamiltonians. The following question arises: Under which conditions the Hamiltonian of some canonical equation should be a de Branges Hamiltonian? The basic theorem of the present paper together with Theorem 1 of the mentioned paper gives the answer to this question.

Доведено теорему, яка була анонсована автором у 1995 р. у статті „Критерий дискретности спектра сингулярной канонической системы" („Функциональный анализ и его приложения", том 29, вип. 3).

Л. де Бранж, розробляючи теорію гільбертових просторів цілих функцій (ми називаємо їх просторами Крейна – де Бранжа, або скорочено К-Б-просторами), прийшов до певного класу канонічних рівнянь фазової розмірності 2. Він показав, що для будь-якого заданого К-Б-простору існує таке канонічне рівняння згаданого класу, яке відроджує ланцюг К-Б-просторів, що входять один до одного. Гамільтоніани таких канонічних рівнянь називаємо гамільтоніанами де Бранжа. Виникло наступне питання: яким повинен бути гамільтоніан якогось канонічного рівняння для того, щоб він був гамільтоніаном де Бранжа? Основна теорема цієї статті разом з теоремою 1 згаданої статті дають відповідь на це питання.

Цель настоящей работы — доказательство теоремы 2 из заметки автора [1], касающейся теорем I и II из [2] (см. также теорему 40 из [3]).

Для того чтобы было ясно, о чем идет речь, в п. 5 приведен ряд понятий, связанных с теорией пространств де Бранжа. Там же сформулирована и доказана основная теорема. В предыдущих пунктах приведены сведения о канонических дифференциальных уравнениях фазовой размерности 2 и порождаемых ими линейных отношениях и операторах, доказан ряд используемых при доказательстве основной теоремы предложений об этих линейных отношениях и операторах, приведены необходимые сведения об R-функциях.

1. О канонических уравнениях фазовой размерности 2. ***1.1. Канонические уравнения.*** Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — заданный промежуток с левым концом в точке a и правым в точке b $(-\infty \le a < b < +\infty)$, $\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ — заданная на I (2×2)-мерная вещественная эрмитово неотрицательная матрица-функция, суммируемая на любом конечном замкнутом промежутке $\Delta \subset I.$ Рассмотрим каноническое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}J = x\mathcal{H}(t)\zeta \tag{1.1}$$

на I для вектор-функции $x(t) = (x_1(t), x_2(t)),$ в котором ζ — комплексный параметр и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу-функцию $\mathcal{H}(t)$ назовем *гамильтонианом* уравнения (1.1). Левый (правый) конец интервала I называем *регулярным,* если гамильтониан $\mathcal{H}(t)$

* Поддержана грантом UK2-2811-OD-06 Министерства образования и науки Украины.

суммируем в правой (левой) окрестности этого конца. В противном случае его называем *сингулярным*. Не нарушая общности, будем рассматривать только такие гамильтонианы, у которых $\operatorname{tr}\mathcal{H}(t) = 1\ \ \forall\, t \in I$. Этого всегда можно добиться путем замены в (1.1) независимой переменной. Такой гамильтониан называем *нормированным*. Теперь левый (правый) конец интервала I оказывается сингулярным в том и только в том случае, когда $a = -\infty$ ($b = +\infty$). В случае, когда конец интервала I регулярен, будем считать, если не оговорено противное, что концевая точка принадлежит I. Вектор-функцию $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ называем решением дифференциального уравнения (1.1), если $u(t)$ абсолютно непрерывна на I и равенство

$$\frac{du(t)}{dt}J = \zeta\, u(t)\mathcal{H}(t)$$

выполняется при почти всех $t \in I$.

1.2. Линейные отношения и операторы, порождаемые каноническими уравнениями. Пусть M — линейное множество всех измеримых и почти всюду конечных на I вектор-функций $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ с естественным образом определенными операциями сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. *Упорядоченную пару* $\{f,\, g\}$[1] *элементов из* M *относим к* l, *если* f *абсолютно непрерывна на* I *и при почти всех* $t \in I$

$$\frac{df(t)}{dt}J = g(t)\mathcal{H}(t). \tag{1.2}$$

Очевидно, l — линейное отношение в M. Его область определения, т. е. множество $\{f \in M\colon \{f,\, g\} \in l$ для хотя бы одного $g \in M\}$ обозначим через $\mathfrak{D}$.

Определение 1.2. *Вектор-функцию* $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ *будем называть решением уравнения*

$$\frac{dx}{dt}J = g(t)\mathcal{H}(t), \tag{1.3}$$

где $g(t)$ — *заданная вектор-функция из* M, *если* $\{u,\, g\} \in l$.

Ясно, что вектор-функция $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ является решением уравнения (1.1) в том и только в том случае, когда $\{u,\, \zeta u\}$ принадлежит l.

Легко убедиться, что для $\{v,\, w\} \in l$, $\{f,\, g\} \in l$ и любых $t_1, t_2 \in I$ справедливо „тождество Лагранжа”

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathcal{H}(t)(w(t))^* dt - \int_{t_1}^{t_2} g(t)\mathcal{H}(t)(v(t))^* dt = \left(f_1(t)\overline{v_2(t)} - f_2(t)\overline{v_1(t)}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.4}$$

Опыт изучения уравнения Штурма – Лиувилля и уравнения струны подсказывает при первом взгляде на (1.4), что для построения на основе линейного отношения l эрмитова оператора в гильбертовом пространстве „наиболее естественным” является квазигильбертово пространство (см. [4])

$$H = \left\{ f \in M\colon\ \|f\|_H^2 = \int_I f(t)\mathcal{H}(t)(f(t))^* dt < \infty \right\}$$

[1] Символ $\{\cdot,\cdot\}$ в настоящей работе применяется для обозначения упорядоченной пары элементов любой природы.

со скалярным произведением

$$(f, u)_H := \int_I f(t)\mathcal{H}(t)(u(t))^* dt,$$

а затем и гильбертово пространство $\mathfrak{H} = H/\theta$, где $\theta = \left\{f \in H : \|f\|_H = 0\right\}$. Элементы пространства $\mathfrak{H}$ будем обозначать строчными готическими буквами и представлять их как множества вектор-функций из H. Если $\mathfrak{f} \in \mathfrak{H}$, то запись $f \in \mathfrak{f}$ означает, что вектор-функция $f \in H$ — одна из вектор-функций, входящих в класс $\mathfrak{f}$, эквивалентных по норме $\|\cdot\|_H$; будем говорить, что f представляет $\mathfrak{f}$.

Определение 1.3. *Вектор-функцию $f \in H$ будем относить к множеству H', если множество $\{t \in I : f(t) \neq (0,0)\}$ ограничено. Полагаем $\mathfrak{H}' := \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{H} : \mathfrak{f} \cap H' \neq \varnothing\}$.*

В соответствии с этим определением, если оба конца промежутка I регулярны, то $H' = H$ и, следовательно, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$.

Определение 1.4. *Упорядоченную пару $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$ элементов из $\mathfrak{H}$ будем относить к множеству S, если существуют такие $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$, что*: 1) $(f, g) \in l$; 2) *существуют $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, такие, что $f(t) = (0, 0)$ при любых $t \in (I \setminus (t_1, t_2))$.*

Ясно, что S — линейное отношение в $\mathfrak{H}$ и, более того, в $\mathfrak{H}'$; его область определения обозначим через $\mathfrak{D}(S)$. Из (1.4) следует, что $S \subset S^*$ (см. терминологию, принятую в [5 – 7])[2].

Нас интересует, является ли S оператором в $\mathfrak{H}$, т.е. следует ли из того, что $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} \in S$ и $\mathfrak{f} = \theta$, равенство $\mathfrak{g} = \theta$. Это бесспорно так, когда $\operatorname{rank}\mathcal{H}(t) = 2$ при почти всех $t \in I$. Однако равенство $\operatorname{rank}\mathcal{H}(t) = 1$ даже при всех $t \in I$ еще не означает, что S не является оператором. В этом вопросе особую роль играют так называемые $\mathcal{H}$-неделимые промежутки ($\mathcal{H}$-н.п.).

Определение 1.5[3]**.** *Промежуток $\Delta \subset I$ называем* (*следуя* [9 – 11]) *$\mathcal{H}$-неделимым типа φ, если $\mathcal{H}(t) = \xi_\varphi \xi_\varphi^T$ при почти всех $t \in \Delta$, где $\xi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ — матрица-столбец, T — символ транспонирования. $\mathcal{H}$-н.п. называем максимальным, если он не является правильной частью другого $\mathcal{H}$-н.п.*

Точка $t \in I$ называется $\mathcal{H}$-особенной, если она является внутренней точкой какого-нибудь $\mathcal{H}$-н.п. Все остальные точки $t \in I$ называются $\mathcal{H}$-неособенными.

Определение 1.6. *Будем говорить, что левый* (*правый*) *конец промежутка I вырожден, если он регулярен и имеется максимальный $\mathcal{H}$-н.п., левый* (*правый*) *конец которого совпадает с a* (b)*. Этот максимальный $\mathcal{H}$-н.п. называем вырождающим, а его правый конец обозначаем через a_0* (*левый — через b_0*).

---

[2] В соответствии с этой терминологией

$$S^* = \{\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{H}^2 : (\mathfrak{f}, \mathfrak{v})_{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{g}, \mathfrak{w})_{\mathfrak{H}} \quad \forall \{\mathfrak{w}, \mathfrak{v}\} \in S\}.$$

[3] Особую роль $\mathcal{H}$-н.п. заметил впервые Л. де Бранж [8], не дав им названия и не разделив их по типам. $\mathcal{H}$-особенные и $\mathcal{H}$-неособенные точки он назвал соответственно сингулярными и регулярными по отношению к $\mathcal{H}$. Мы же термины „регулярный” и „сингулярный” используем для классификации концов промежутка I.

В работах [9, 10], [11][4] установлено, что S является оператором в $\mathfrak{H}$ (и даже в $\mathfrak{H}'$) в том и только в том случае, когда отсутствуют $\mathcal{H}$-н.п.

При любом $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\xi_\varphi^T J \xi_\varphi = 0$. Поэтому, как легко убедиться, если Δ — $\mathcal{H}$-н.п. типа φ, то $f(t)\xi_\varphi = \mathrm{const}$ на Δ для любой вектор-функции $f \in \mathfrak{D}$ (см. лемму 2.1[11]). Это подсказывает разумность введения в следующем определении подпространств $\hat{H}$ и $\hat{\mathfrak{H}}$ пространств H и $\mathfrak{H}$ соответственно.

Определение 1.7. *Вектор-функцию $f \in H$ будем относить к $\hat{H}$, если для любого максимального $\mathcal{H}$-н.п. Δ имеется такая константа $c(f, \Delta) \in \mathbb{C}$, что $f(t)\xi_\varphi = c(f, \Delta)$ при почти всех $t \in \Delta$, где φ — тип этого $\mathcal{H}$-н.п. Полагаем, что* $\hat{\mathfrak{H}} := \left\{\mathfrak{f} \in \mathfrak{H} : \mathfrak{f} \cap \hat{H} \neq \varnothing\right\}$, $\hat{S} := \left\{\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} \in S : \mathfrak{g} \in \hat{\mathfrak{H}}\right\}$.

Если нет $\mathcal{H}$-н.п., то $\hat{H} = H$ и, следовательно, $\hat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$, $\hat{S} = S$.

Определение 1.8. *Если левый (правый) конец промежутка I является вырожденным, то вектор-функцию $f \in H$ относим к множеству $\hat{\hat{H}}$, если $f \in \hat{H}$ и* $c(f, [a, a_0]) = 0 \quad (c(f, [b_0, b]) = 0)$; $\hat{\hat{H}}' := \hat{\hat{H}} \cap H'$, $\hat{\hat{\mathfrak{H}}} := \left\{\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}} : \mathfrak{f} \cap \hat{\hat{H}} \neq \varnothing\right\}$, $\hat{\hat{\mathfrak{H}}}' = \hat{\hat{\mathfrak{H}}} \cap \mathfrak{H}'$.

Установлено ([11], лемма 6.1, теоремы 6.1 и 7.2), что $\hat{S}$ — действующий в $\hat{\mathfrak{H}}$ эрмитов оператор, $\mathfrak{D}(\hat{S}) \subset \hat{\hat{\mathfrak{H}}}'$, $\overline{\mathfrak{D}(\hat{S})} = \hat{\hat{\mathfrak{H}}}'$, $\overline{\mathfrak{D}(S^*)} = \hat{\mathfrak{H}}$. $\hat{S}^*$ (если сопряжение рассматривать в $\hat{\mathfrak{H}}$) является оператором в $\hat{\mathfrak{H}}$, и он реализуется линейным соотношением l в том смысле, что для любого элемента $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} \in \hat{S}^*$ существуют $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$, для которых $\{f, g\} \in l$.

Отметим, что в случае, когда $-\infty$ является концом максимального $\mathcal{H}$-н.п. Δ типа φ, для любой вектор-функции $f \in \mathfrak{f} \in \hat{\hat{\mathfrak{H}}}$ имеем $f(t)\xi_\varphi = c(f, \Delta)$ при почти всех $t \leq a_0$, где a_0 — правый конец промежутка Δ. Следовательно,

$$\infty > \int_\Delta f(t)\mathcal{H}(t) f^*(t)\,dt = \int_\Delta |c(f, \Delta)|^2 dt = \int_{-\infty}^{a_0} |c(f, \Delta)|^2 dt$$

и поэтому $c(f, \Delta) = 0$, а

$$\|\mathfrak{f}\|_{\mathfrak{H}}^2 = \|f\|_H^2 = \int_{I_0} f(t)\mathcal{H}(t) f^*(t)\,dt,$$

где $I_0 = I \cap [a_0 + \infty)$. Если же, кроме того, $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(\hat{S})$, то вектор-функция $f \in (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{D})$ непрерывна. Следовательно, $f_1(a_0)\cos\varphi + f_2(a_0)\sin\varphi = 0$. Таким образом, случай, когда левый конец промежутка I сингулярен и $-\infty$ является левым концом $\mathcal{H}$-н.п., равносилен случаю регулярности левого конца промежутка I, а принадлежность $\mathfrak{f} \in \mathfrak{H}$ множеству $\mathfrak{D}(\hat{S})$ возможна лишь в том случае, когда вектор-функция $f \in (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{D})$ удовлетворяет в точке a_0 указанному выше условию. Аналогичная ситуация возникает, когда правый конец сингулярен и $+\infty$ является правым концом $\mathcal{H}$-н.п. В дальнейшем мы исключаем из рассмотрения случаи, когда сингулярный конец является концом $\mathcal{H}$-н.п.

[4] Работа [11] — несколько видоизмененный вариант более известной работы автора [10], которая была депонирована в 1984 году.

Легко понять, что оператор $\hat{S}^*$ замкнут. Поскольку $\hat{S} \subset \hat{S}^*$, замыкание $\overline{\hat{S}}$ оператора $\hat{S}$ также является оператором.

Определение 1.9. *Будем говорить, что каноническое уравнение* (1.1) *на промежутке I имеет дискретный спектр, если либо оператор $\hat{S}$ самосопряжен в $\hat{\mathfrak{H}}$ и его спектр дискретен* (*т.е. не имеет предельных точек, отличных от $+\infty$ и $-\infty$*), *либо $\hat{S}$ имеет хотя бы одно самосопряженное в $\hat{\mathfrak{H}}$ расширение с дискретным спектром.*

Отметим, что для выполнения последнего требования достаточно, чтобы существовало имеющее дискретный спектр расширение оператора $\hat{S}$ с выходом из $\hat{\mathfrak{H}}$.

2. Некоторые сведения об *R*-функциях.

Определение 2.1. *Голоморфную в каждой из полуплоскостей* $\mathbb{C}_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ *и* $\mathbb{C}_- := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\zeta < 0\}$ *функцию $f(\zeta)$ называем R-функцией, если* $\operatorname{Im}\xi \operatorname{Im} f(\zeta) \geq 0 \quad \forall \zeta \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$ *и* $f(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})}$ *при* $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$. *Множество всех R-функций обозначаем через* (R).

Если R-функция принимает вещественное значение при невещественном ζ, то она является вещественной константой. Такую R-функцию называем вырожденной. Любая R-функция $f(\zeta)$ допускает единственное представление

$$f(\zeta) = \alpha_f + \beta_f \zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} - \frac{1}{1+\lambda^2} \right) d\tau_f(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\zeta \neq 0, \tag{2.1}$$

в котором $\alpha_f \in \mathbb{R}$, $\beta_f \geq 0$, а τ_f — неотрицательная мера на борелевых множествах из $\mathbb{R}$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2)^{-1} d\tau_f(\lambda) < \infty. \tag{2.2}$$

Константа β_f определяется равенством

$$\beta_f = \lim_{y \uparrow +\infty} \frac{f(i\eta)}{i\eta}, \tag{2.3}$$

причем предел в правой части (2.3) существует для любой функции $f \in (R)$ и является вещественным неотрицательным числом. Ясно, что множество точек, имеющих положительную τ_f-меру, максимум счетно. Если $\tau_f(\lambda_1) = 0$, $\tau_f(\lambda_2) = 0$, где $\lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то в соответствии с формулой обращения Стильтьеса

$$\tau_f[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} f(\lambda + i\varepsilon) d\lambda. \tag{2.4}$$

Меру τ_f будем называть спектральной мерой R-функции $f(\zeta)$, а ее носитель $\sigma[\tau_f]$ — спектром этой R-функции.

Вообще говоря, R-функция f состоит из двух частей: „верхней" и „нижней" — функции, определенной на $\mathbb{C}_+$, и функции, определенной на $\mathbb{C}_-$. Правда, одна из них вполне определяет другую. Верхняя и нижняя части R-функции $f(\zeta)$ не являются, вообще говоря, аналитическими продолжениями друг друга. Если же имеется интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, τ_f-мера которого равна нулю, то интеграл, входящий в правую часть (2.1), имеет смысл не только при $\zeta \in \mathbb{C}_+$ и $\zeta \in \mathbb{C}_-$, но и при любом $\zeta \in (a, b)$ и принимает там вещественные значения. В этом случае верхняя и нижняя части R-функции $f(\zeta)$ являются аналитическими продолжениями друг друга через этот интервал, принимающими на нем вещественные значения. Обратно, если, например, верхняя часть R-функции $f(\zeta)$ продолжается хотя бы по непрерывности на интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и принимает там вещественные значения, то в силу формулы (2.4) τ_f-мера интервала (a, b) равна нулю и, следовательно, верхняя и нижняя части R-функции $f(\zeta)$ аналитически продолжаются друг в друга через этот интервал.

В дальнейшем, говоря об R-функции, будем считать, что она определена не только на $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, но и на всех интервалах вещественной оси, имеющих нулевую τ_f-меру, равенством (2.1). В связи с этим R-функция $f(\zeta)$ является мероморфной в том и только в том случае, когда ее спектр $\sigma[\tau_f]$ дискретен, т. е. не имеет конечных предельных точек и в этом случае $\sigma[\tau_f]$ совпадает с множеством полюсов функции f; ее полюсы просты, ее нули также вещественны и просты и строго перемежаются с полюсами. Другие сведения об R-функциях можно найти в работе [12].

3. Граничная задача с каноническим дифференциальным уравнением на интервале с регулярным левым концом и сингулярным правым. ***3.1. Граничные задачи и соответствующие пространства.*** Пусть $I = [0, +\infty)$ и $\mathcal{H}(t)$ — нормированный гамильтониан, определенный на I. В связи с принятой в п. 1 терминологией левый конец промежутка I регулярен, а правый сингулярен. Напомним, что мы исключаем здесь случай, когда $+\infty$ является правым концом $\mathcal{H}$-н.п.

Рассмотрим две граничные задачи:

$$\frac{dx}{dt} J = x\mathcal{H}(t)\zeta, \qquad t \in I, \qquad x|_{t=0} = (0, 1), \tag{3.1_0}$$

$$\frac{dx}{dt} J = x\mathcal{H}(t)\zeta, \qquad t \in I, \qquad x|_{t=0} = (1, 0). \tag{$3.1_{\pi/2}$}$$

Пусть $\varphi(t, \zeta) = (\varphi_1(t, \zeta), \varphi_2(t, \zeta))$ — решение (единственное) задачи (3.1_0), а $\psi(t, \zeta) = (\psi_1(t, \zeta), \psi_2(t, \zeta))$ — решение задачи $(3.1_{\pi/2})$.

С задачей (3.1_0) мы ассоциируем введенные ниже пространства $\hat{H}_0$ и $\hat{\mathfrak{H}}_0$, а также оператор $\hat{S}_0$, действующий в $\hat{\mathfrak{H}}_0$. В случае, когда левый конец промежутка I является концом максимального $\mathcal{H}$-н.п. Δ типа 0, мы говорим, следуя [11], что имеет место исключительный случай[5] для задачи (3.1_0), и полагаем

$$\hat{H}_0 = \{f \in \hat{H} : c_{f,\Delta} = 0\}, \qquad \hat{\mathfrak{H}}_0 = \{\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}} : \mathfrak{f} \cap \hat{H}_0 \neq \varnothing\};$$

если же он не имеет места, считаем, что $\hat{\mathfrak{H}}_0 = \hat{\mathfrak{H}}$. Через $\hat{H}_0'$ обозначаем $\hat{H}_0 \cap H'$ и полагаем $\hat{\mathfrak{H}}_0' = \{\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}_0' : \mathfrak{f} \cap \hat{H}_0' \neq \varnothing\}$.

С задачей $(3.1_{\pi/2})$ мы ассоциируем пространства $\hat{H}_{\pi/2}$ и $\hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2}$ и действующий в $\hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2}$ оператор $\hat{S}_{\pi/2}$. В случае, когда левый конец промежутка I явля-

[5] В работах [10, 11] мы его называли первым исключительным. Здесь слово „первый” мы опустили, ибо если правый конец промежутка I бесконечен, так называемый второй исключительный случай не может иметь места.

ется концом максимального $\mathcal{H}$-н.п. Δ типа $\pi/2$, мы говорим, что имеет место исключительный случай для задачи $(3.1_{\pi/2})$, и полагаем

$$\hat{H}_{\pi/2} = \left\{ f \in \hat{H} : c(f, \Delta) = 0 \right\}, \qquad \hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2} = \left\{ \mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}} : \mathfrak{f} \cap \hat{H}_{\pi/2} \neq \varnothing \right\};$$

если же он не имеет места, считаем, что $\hat{\mathcal{H}}_{\pi/2} = \hat{\mathfrak{H}}$.

3.2. Спектральные меры граничных задач. Рассмотрим преобразование Φ, переводящее вектор-функцию $f \in \hat{H}_0$ в функцию

$$(\Phi f)(\zeta) = \int_I f(t)\mathcal{H}(t)\varphi(t, \bar{\zeta})^* dt \tag{3.2}$$

переменной ζ.

Определение 3.1. *Неотрицательная на борелевых множествах из* $\mathbb{R}$ *мера* τ *называется спектральной мерой граничной задачи* (3.1_0), *если преобразование* Φ *изометрически отображает* $\hat{H}_0'$ *в* $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(-\infty, +\infty)$, *т. е. имеет место „равенство Парсеваля"*

$$\int_{\mathbb{R}} |(\Phi f)(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_I f(t)\mathcal{H}(t)(f(t))^* dt \qquad \forall f \in \hat{H}_0', \tag{3.3}$$

а в случае, когда это преобразование переводит $\hat{H}_0'$ *в плотную часть* $\mathcal{L}_\tau^{(2)}$, *спектральная мера называется ортогональной.*

Аналогичное определение принимается для граничной задачи $(3.1_{\pi/2})$.

3.3. Операторы, порождаемые граничными задачами.

Определение 3.2. *Элемент* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in \hat{\mathfrak{H}}^2$ *будем относить к* $\hat{S}_0$ (*к* $\hat{S}_{\pi/2}$) *в том и только в том случае, когда существует такая вектор-функция* $f \in \mathfrak{f}$, *что*:

1) $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) \in l$ *для хотя бы одной и, следовательно, любой вектор-функции* $g \in \mathfrak{g}$;

2) $f(0)\xi_0 = 0$ $(f(0)\xi_{\pi/2} = 0)$;

3) *существует* $t_f \in I$ *такая, что* $f(t) = (0, 0)$ $\forall t \in [t_f, +\infty)$.

Определенные здесь линейные отношения $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_{\pi/2}$ являются операторами в $\hat{\mathfrak{H}}_0$ и $\hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2}$ соответственно ([11], теорема 10.1). Более того, их области определения плотны в соответствующих пространствах ([11], теорема 9.3, определения 7.2, 7.3 и замечание к последнему), т. е. $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_{\pi/2}$ — симметрические операторы в соответствующих пространствах, и поэтому $\hat{S}_0^*$ и $\hat{S}_{\pi/2}^*$ — операторы (если сопряжения рассматривать в соответствующих пространствах). В действительности операторы $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_{\pi/2}$ в существенном самосопряженные, т. е. их замыкания $\overline{\hat{S}_0}$ и $\overline{\hat{S}_{\pi/2}}$ — самосопряженные операторы. Докажем это на примере оператора $\hat{S}_0$. Отметим сначала, что, как установлено в [11] (лемма 8.1), пара $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$ из $\hat{\mathfrak{H}}^2$ принадлежит $\hat{S}_0^*$ в том и только в том случае, когда существует такая вектор-функция $f \in \mathfrak{f}$, что: 1) $\{f, g\} \in l$ для хотя бы одной вектор-функции $g \in \mathfrak{g}$; 2) $f(0)\xi_0 = 0$. Поэтому элемент $\mathfrak{w} \in \hat{\mathfrak{H}}_0$ может быть собственным вектором оператора $\hat{S}_0^*$, соответствующим невещественному собственному числу λ только в том случае, когда существует такая вектор-функция $w \in \mathfrak{w}$, что $\{w, \lambda w\} \in l$ и $w(0)\xi_0 = 0$, а это возможно тогда и только тогда, когда $w(t) = k\varphi(t\lambda)$, где k — какая-то ненулевая константа. Из вещественности гамильтониана $\mathcal{H}$ вытекает, что $\varphi(t, \bar{\lambda}) = \overline{\varphi(t, \lambda)}$, а интегралы

$$\int_I \varphi(t, \lambda)\mathcal{H}(t)\varphi(t, \lambda)^* dt, \qquad \int_I \varphi(t, \bar{\lambda})\mathcal{H}(t)\varphi(t, \bar{\lambda})^* dt$$

либо оба конечны (и равны), либо оба бесконечны и, значит, *дефектные числа оператора* $\hat{S}_0$ *либо оба равны нулю* (когда интегралы бесконечны и тогда не существует в $\hat{\mathfrak{H}}_0$ соответствующего этому числу λ собственного вектора оператора $\hat{S}_0^*$), *либо оба равны* 1 (когда интегралы конечны).

Преобразование Φ порождает для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ действующий на $\hat{\mathfrak{H}}'_0$ функционал Φ, определенный равенством

$$\Phi(\mathfrak{f}, \zeta) = \Phi(f, \zeta),$$

где $f \in \mathfrak{f}\ (\in \hat{\mathfrak{H}}'_0)$. Как установлено в § 11 из [11], Φ является направляющим функционалом оператора $\hat{S}_0$. Поскольку $\mathfrak{D}(\hat{S}_0)$ плотна в $\hat{\mathfrak{H}}_0$, как следует из теоремы 1 из [13], существует такая неотрицательная на борелевских множествах из $\mathbb{R}$ мера τ, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\mathfrak{f}, \lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \|\mathfrak{f}\|^2_{\mathfrak{H}}, \tag{3.4}$$

т. е. выполняется (3.3) для $f \in \hat{H}'_0$. Так было установлено в [11] существование спектральной функции граничной задачи (3.1_0) (даже в случае невещественного гамильтониана).

Как доказал Л. де Бранж ([8], теорема VIII), эта граничная задача имеет только одну спектральную меру. Поэтому, как установил М. Г. Крейн ([13], теорема 2) (см. также [14, с. 172 – 203]), из единственности спектральной меры граничной задачи (3.1_0) следует, что равен нулю хотя бы один из дефектных индексов оператора $\hat{S}_0$. Поэтому оба равны нулю и, следовательно, $\overline{\hat{S}_0}$ — самосопряженный оператор.

В силу самосопряженности оператора $\overline{\hat{S}_0}$ единственная спектральная мера τ граничной задачи (3.1_0) связана со спектральной оператор-функцией $E(\lambda)$ этого оператора равенством ([14], доказательство теоремы 1)

$$\int_T d(E(\lambda)\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \int_T |\Phi(\mathfrak{f}, \lambda)|^2 d\tau(\lambda) \qquad \forall \mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}'_0 \tag{3.5}$$

для любого борелева множества $T \subset \mathbb{R}$. Более того, если доопределить Φ по непрерывности на $\hat{\mathfrak{H}}_0$, то (3.4) и (3.5) будут справедливы для любого $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}_0$.

Поскольку оператор $\overline{\hat{S}_0}$ является расширением оператора $\hat{S}_0$, введенного в п. 1, справедливо следующее предложение.

Предложение А. *Каноническое уравнение из* (3.1_0), *рассматриваемое на* $[0, +\infty)$, *имеет дискретный спектр в том и только в том случае, когда единственная спектральная мера граничной задачи* (3.1_0) *имеет дискретный носитель, который в соответствии с* (3.5) *совпадает со спектром оператора* $\overline{\hat{S}_0}$.

Предложение В. *Утверждения, аналогичные всем приведенным выше для задачи* (3.1_0), *имеют место для граничной задачи* $(3.1_{\pi/2})$, *но во всех опреде-*

лениях и рассуждениях вектор-функцию $\varphi(x,\zeta)$ *нужно заменить на* $\psi(x,\zeta)$, *пространства* $\hat{H}_0'$, $\hat{\mathfrak{H}}_0$, $\hat{\mathfrak{H}}'$ *— пространствами* $\hat{H}_{\pi/2}'$, $\hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2}$, $\hat{\mathfrak{H}}_{\pi/2}'$ *соответственно, а оператор* $\hat{S}_0$ *— оператором* $\hat{S}_{\pi/2}$.

3.4. Функции Вейля граничных задач $(\mathbf{3.1_0})$, $(\mathbf{3.1_{\pi/2}})$. Пусть, как и в пп. 3.1, $I = [0,+\infty)$. Для любого фиксированного $t \in (0,+\infty)$, любых $\xi \in (\mathbb{C}_+ \bigcap (-\infty,+\infty))$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ точка

$$w^{(t)}(\xi,\zeta) = \frac{\psi_1(t,\zeta)\xi + \psi_2(t,\zeta)}{\varphi_1(t,\zeta)\xi + \varphi_2(t,\zeta)} \tag{3.6}$$

принадлежит $\mathbb{C}_+$, и, когда ξ пробегает $\mathbb{C}_+ \bigcup (-\infty,+\infty)$, точка $w^{(t)}(\xi,\zeta)$ пробегает круг $K^{(t)}(\zeta)$, радиус которого

$$r^{(t)}(\zeta) = \frac{1}{|[\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(t,\zeta)](t)|}, \tag{3.7}$$

где символ $[u,v](t)$ для вектор-функций $u(t) = (u_1(t),u_2(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ определяется равенством

$$[u,v](t) = u_2(t)\overline{v_1(t)} - u_1(t)\overline{v_2(t)} \quad (= u(t)J(v(t))^*).$$

При $t_2 > t_1$ $K^{(2)}(\zeta) \subset K^{(1)}(\zeta)$. Как следует из теоремы VIII [8],

$$[\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\zeta)](t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3.8}$$

Поэтому, как следует из (3.7), круг $K^{(t)}(\zeta)$ при $t \to +\infty$ стягивается в точку при любом фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}_+$. Следовательно, при $\zeta \in \mathbb{C}_+$, а значит и при $\zeta \in \mathbb{C}_-$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi_1(t,\zeta)}{\varphi_1(t,\zeta)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\psi_2(t,\zeta)}{\varphi_2(t,\zeta)} = \Omega_0(\zeta), \tag{3.9}$$

где $\Omega_0(\zeta)$ — невырожденная R-функция. Единственная спектральная мера граничной задачи (3.1_0) — это спектральная мера R-функции $\Omega_0(\zeta)$, т. е. мера τ_0 из представления

$$\Omega_0(\zeta) = \alpha_0 + \beta_0\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\tau_0(\lambda). \tag{3.10}$$

Это устанавливается методами, аналогичными применяемым в теории гнездящихся кругов Г. Вейля и в спектральной теории струны (см. [15]).

Единственная же спектральная мера $\tau_{\pi/2}$ граничной задачи $(3.1_{\pi/2})$ является спектральной мерой R-функции $\Omega_{\pi/2}(\zeta) = -(\Omega_0(\zeta))^{-1}$.

Из теории Г. Вейля следует еще, что при $\operatorname{Im} z \neq 0$ решение

$$\chi(t,\zeta) := \psi(t,\zeta) - \Omega_0(\zeta)\varphi(t,\zeta) \tag{3.11}$$

канонического уравнения (1.1) на интервале $[0;+\infty)$ принадлежит H, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \chi(t,\zeta)H(t)(\chi(t,\zeta))^* dt < \infty. \tag{3.12}$$

Более того, $\chi(t,\zeta)$ принадлежит $\hat{H}$, так как $\chi(t,\zeta) \in \mathfrak{D}$.

Поскольку в соответствии с (1.4)

$$2i\,\mathrm{Im}\,\zeta\int_0^t \chi(s,\zeta)\mathcal{H}(s)(\varphi(s,\zeta))^* ds \;=\; [\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\zeta)](t), \tag{3.13}$$

при $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$ из (3.8) следует, что $\varphi(\cdot,\zeta)$ не принадлежит H, а так как $\chi(\cdot,\zeta)$ принадлежит H, в соответствии с (3.11) и (3.12) $\psi(t,\zeta)$ не принадлежит H и, вообще, решения, линейно независимые с $\chi(\cdot,\zeta)$, не принадлежат H.

3.5. Поведение решений канонического уравнения на сингулярном конце.

Лемма 3.1.

$$\lim_{t\to+\infty}[\chi(\cdot,\zeta),\chi(\cdot,\zeta)](t) \;=\; 0, \tag{3.14}$$

т. е.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\overline{\chi_1(t,\zeta)}\chi_2(t,\zeta) - \chi_1(t,\zeta)\overline{\chi_2(t,\zeta)}\right) \;=\; 0,$$

при любом фиксированном $\zeta\in(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)$.

Доказательство. Положим $\omega^{(t)}(\zeta) = \dfrac{\psi_1(t,\zeta)}{\varphi_1(t,\zeta)}$ при $\zeta\in\mathbb{C}_+$. Точка $\omega^{(t)}(\zeta)$ лежит на границе круга $K^{(t)}(\zeta)$ (см. (3.6)), а так как $\Omega_0(\zeta)$ также принадлежит кругу $K^{(t)}(\zeta)$, то (см. (3.7), (3.8))

$$\left|\Omega_0(\zeta)-\omega^{(t)}(\zeta)\right| \;\le\; 2r^{(t)}(\zeta) \;=\; \frac{2}{|[\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\zeta)](t)|}. \tag{3.15}$$

Поскольку $\psi_1(t,\zeta)-\omega^{(t)}\varphi_1(t,\zeta) \;=\; 0$ и, кроме того, $[u,u](t) \;=\; 0$ всякий раз, когда $u_1(t) \;=\; 0$, то

$$\left[\psi(\cdot,\zeta)-\omega^{(t)}(\zeta)\varphi(\cdot,\zeta),\; \psi(\cdot,\zeta)-\omega^{(t)}(\zeta)\varphi(\cdot,\zeta)\right](t) \;=\; 0.$$

Вследствие того, что (см. (3.11))

$$\psi(t,\zeta)-\omega^{(t)}(\zeta)\varphi(t,\zeta) \;=\; \chi(t,\zeta) - (\omega^{(t)}(\zeta)-\Omega_0(\zeta))\varphi(t,\zeta),$$

в соответствии с предыдущим равенством имеем

$$\left[\chi(\cdot,\zeta)-(\omega^{(t)}(\zeta)-\Omega_0(\zeta))\varphi(\cdot,\zeta),\; \chi(\cdot,\zeta)-(\omega^{(t)}(\zeta)-\Omega_0(\zeta))\varphi(\cdot,\zeta)\right] \;=\; 0$$

и, следовательно (ибо $[u,v](t) = \overline{[v,u](t)}$, $[ku,v] = k[u,v]$ $\forall k\in\mathbb{C}$),

$$[\chi(\cdot,\zeta),\chi(\cdot,\zeta)](t) \;=\; 2\,\mathrm{Re}\big(\omega^{(t)}(\zeta)-\Omega_0(\zeta))[\varphi(\cdot,\zeta),\chi(\cdot,\zeta)](t) \;-$$

$$-\;\left|\omega^{(t)}(\zeta)-\Omega_0(\zeta)\right|^2[\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\zeta)](t). \tag{3.16}$$

В соответствии с (1.4), (3.11) – (3.13)

$$[\varphi(\cdot,\zeta),\chi(\cdot,\zeta)](t) \;=\; [\varphi(\cdot,\zeta),\chi(\cdot,\zeta)](0) + 2i\,\mathrm{Im}\,\zeta\int_0^t \varphi(s,\zeta)\mathcal{H}(s)(\chi(s,\zeta))^* ds \;=$$

$$=\; O\left(\left(\int_0^t \varphi(s,\zeta)\mathcal{H}(s)(\varphi(s,\zeta))^* ds\right)^{1/2}\right) \;=$$

$$=\; O\left([\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\zeta)](t)^{1/2}\right) \quad\text{при}\quad t\to\infty.$$

Теперь из (3.7), (3.8), (3.15) и (3.16) вытекает (3.14).

3.6. Канонические дифференциальные уравнения на $[0, +\infty)$ ***с дискретным спектром.***

Лемма 3.2. *Каноническое дифференциальное уравнение* (1.1) *на промежутке* $[0, +\infty)$ *имеет дискретный спектр в том и только в том случае, когда функция* $\Omega_0(\zeta)$ *мероморфна.*

Доказательство. Функция $\Omega_0(\zeta)$ мероморфна в том и только в том случае (см. конец п. 2), когда дискретен ее спектр, т. е. дискретен носитель $\sigma[\tau_0]$ ее спектральной меры, которая является также единственной спектральной мерой граничной задачи (3.1_0). В силу предложения А (см. пп. 3.3) последнее имеет место в том и только в том случае, когда каноническое уравнение (1.1) на промежутке $[0, +\infty)$ имеет дискретный спектр.

Лемма 3.3. *Если каноническое дифференциальное уравнение* (1.1) *на промежутке* $I = [0, +\infty)$ *имеет дискретный спектр, а функция* $a(t)$ *суммируема на этом промежутке, то* $\Omega_0(0) = 0$, *где* Ω_0 — R*-функция, мероморфность которой установлена леммой* 3.2.

Доказательство. Как отмечалось, единственная спектральная мера $\tau_{\pi/2}$ граничной задачи $(3.1_{\pi/2})$ является спектральной мерой R-функции $\Omega_{\pi/2}(\zeta) = -(\Omega_0(\zeta))^{-1}$. Если каноническое уравнение на $[0, +\infty)$ имеет дискретный спектр, то $\Omega_0(\zeta)$ — мероморфная R-функция. Следовательно, $\Omega_{\pi/2}(\zeta)$ — мероморфная R-функция. Поскольку $\psi(t, 0) = (1; 0)$ $\forall t \in I$, то

$$\int_0^{+\infty} \psi(t,0)\mathcal{H}(t)(\psi(t,0))^* dt = \int_0^{+\infty} a(t)\,dt < \infty$$

и, следовательно, точка $\lambda = 0$ является точкой спектра единственной спектральной меры граничной задачи $(3.1_{\pi/2})$, а значит и точкой спектра R-функции $\Omega_{\pi/2}(\zeta)$, т. е. ее полюсом. Так как $\Omega_0(\zeta) = -(\Omega_{\pi/2}(\zeta))^{-1}$, то $\Omega_0(0) = 0$.

Лемма 3.4. *Если каноническое уравнение из* (3.1_0) *на промежутке* $I = [0, +\infty)$ *имеет дискретный спектр и функция* $a(t)$ *суммируема на* I, *то существует такая определенная на* $I \times \mathbb{C}$ *вектор-функция* $\theta(t, \zeta) = (\theta_1(t, \zeta), \theta_2(t, \zeta))$, *что*:

1) *при любом фиксированном* $t \in I$ *функции* $\theta_1(t, \zeta)$ *и* $\theta_2(t, \zeta)$ *являются целыми вещественными функциями переменной* ζ;

2) $\theta_1(t, 0) = 1$, $\theta_2(t, 0) = 0$ *при любом* $t \in I$;

3) *при любом фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}$ *вектор-функция* $\theta(t, \zeta)$ *является ненулевым решением канонического уравнения из* (3.1_0) *на* I;

4) *при любом фиксированном* $z \in \mathbb{C}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\overline{\theta_1(t,\zeta)}\theta_2(t,\zeta) - \theta_1(t,\zeta)\overline{\theta_2(t,\zeta)} \right) = 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Если каноническое уравнение из (3.1_0) на промежутке $I = [0, +\infty)$ имеет дискретный спектр, то в соответствии с леммами 3.2 и 3.3 имеет место представление

$$\Omega_0(\zeta) = \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{\mathcal{Q}(\zeta)}, \tag{3.18}$$

где $\mathcal{P}(\zeta)$ и $\mathcal{Q}(\zeta)$ — целые вещественные функции, не имеющие невещественных нулей и такие, что $\mathcal{P}(0) = 0$, $\mathcal{Q}(0) = 1$. Пусть $\chi(t, \zeta)$ — вектор-функция, определенная равенством (3.11). Положим при любом $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\theta(t,\zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\psi(t,\zeta) - \mathcal{P}(\zeta)\varphi(t,\zeta) \tag{3.19}$$

и в соответствии с этим

$$\theta_1(t,\ \zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\psi_1(t,\zeta) - \mathcal{P}(\zeta)\varphi_1(t,\zeta), \tag{3.20}$$

$$\theta_2(t,\ \zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\psi_2(t,\zeta) - \mathcal{P}(\zeta)\varphi_2(t,\zeta). \tag{3.21}$$

Согласно же (3.11), (3.18) и (3.19) при $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$

$$\theta(t,\zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\chi(t,\zeta), \tag{3.22}$$

$$\theta_1(t,\ \zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\chi_1(t,\zeta), \tag{3.23}$$

$$\theta_2(t,\ \zeta) = \mathcal{Q}(\zeta)\chi_2(t,\zeta). \tag{3.24}$$

Функции $\theta_1(t,\ \zeta)$ и $\theta_2(t,\ \zeta)$, согласно (3.20) и (3.21), при фиксированном $t \in I$ являются целыми вещественными функциями переменной ζ, ибо таковы и $\mathcal{P}(\zeta)$, и $\mathcal{Q}(\zeta)$, и $\varphi_i(t,\zeta)$, и $\psi_i(t,\zeta)$. Утверждение 1 доказано. Поскольку $\varphi(t,\zeta)$ и $\psi(t,\zeta)$ — решения граничных задач (3.1_0) и $(3.1_{\pi/2})$ соответственно, то из (3.19) следует, что $\theta(t,\zeta)$ — решение канонического дифференциального уравнения из этих задач на $I = [0,+\infty)$. Кроме того,

$$\theta(0,\zeta) = \mathcal{Q}(0)\psi(0,z) + \mathcal{P}(0)\varphi(0,z) = 1\cdot(1;0) + 0\cdot(0;1) = (1;0),$$

что доказывает утверждение 3. Так как при $\zeta = 0$ любое решение канонического уравнения из (3.1_0) является константой на $I = [0,+\infty)$, а $\theta(0,0) = (1,0)$, установлено и утверждение 2. Утверждение 4 леммы при невещественных ζ вытекает из (3.23) и (3.24) и леммы 3.1, а при вещественных ζ оно очевидно, ибо $\theta_1(t,\ \zeta)$ и $\theta_2(t,\ \zeta)$ при фиксированном t — целые вещественные функции переменной ζ.

4. Канонические дифференциальные уравнения на $(-\infty, 0]$ с дискретным спектром. Рассмотрим на промежутке $I = (-\infty, 0]$ каноническое уравнение (1.1) с нормированным гамильтонианом $\mathcal{H}(t)$. Наша цель — доказательство приведенной ниже теоремы 4.1, которая дает подход к выяснению природы гамильтониана де Бранжа. Для ее доказательства рассмотрим промежуток $\tilde I = [0,+\infty)$ и определим на нем гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde a(t) & \tilde b(t) \\ \tilde b(t) & \tilde s(t) \end{pmatrix}$ равенством

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(-t) \qquad \forall\, t \geq 0,$$

в соответствии с которым $\tilde a(t) = a(-t)$, $\tilde b(t) = b(-t)$, $\tilde c(t) = c(-t)$, и рассмотрим каноническое уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt}J = x\tilde{\mathcal{H}}(t)\zeta \tag{4.1}$$

на промежутке $\tilde I = [0,+\infty)$. В соответствии с этим введем в рассмотрение линейное отношение $\tilde l$, положив, что $(\tilde f, \tilde g) \in \tilde l$, если

$$\frac{d\tilde f}{dt}J = \tilde g(t)\tilde{\mathcal{H}}(t)$$

почти всюду на $\tilde I$. Введем пространства, аналогичные пространствам H, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$, $\hat H$, $\hat{\mathfrak{H}}$, и линейные отношения, аналогичные S, $\hat S$ (см. п. 1), для $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ на $\tilde I = [0,+\infty)$, обозначив их теми же буквами и метками, но со значком $\sim$.

Введем операцию T, переводящую функции, определенные на $I = (-\infty, 0]$, в функции, определенные на $\tilde{I} = [0, +\infty)$, в соответствии с правилом

$$\tilde{u} = Tu, \quad \text{если} \quad \tilde{u}(t) = u(-t) \quad \forall\, t \in [0, +\infty).$$

Это правило распространяется на вектор-функции: для $\tilde{f}(t) = (\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t))$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ мы пишем $\tilde{f} = Tf$, если $\tilde{f}_i = Tf_i$, $i = 1, 2$.

Ясно, что T изометрически отображает пространство H на $\tilde{H}$, а пространство $\hat{H}$ на $\tilde{\hat{H}}$. Для $\mathfrak{f} \in \mathfrak{H}$ и $\tilde{\mathfrak{f}} \in \tilde{\mathfrak{H}}$ мы пишем $\tilde{\mathfrak{f}} = T\mathfrak{f}$, если существуют $f \in \mathfrak{f}$ и $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{f}}$ такие, что $\tilde{f} = Tf$. Легко убедиться, что если $(f, g) \in l$ и $\tilde{f} = Tf$, $\tilde{g} = Tg$, то $(\tilde{f}, -\tilde{g}) \in l$. Отсюда легко следует, что преобразование T, действующее из $\mathfrak{H}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$, изометрически переводит оператор S в оператор $-\tilde{S}$, и поэтому, если оператор S имеет самосопряженные расширения с дискретным спектром, то оператор $-\tilde{S}$ и, следовательно, оператор $\tilde{S}$ имеют самосопряженные расширения с дискретным спектром. Поэтому каноническое уравнение (1.1) на $I = (-\infty, 0]$ имеет дискретный спектр в том и только в том случае, когда дискретный спектр имеет каноническое уравнение (4.1) на $\tilde{I} = [0, +\infty)$ (см. определение 1.9). Следовательно, в случае, когда $a(t)$ суммируема на I, а значит $\tilde{a}(t)$ суммируема на $\tilde{I}$, в соответствии с леммой 3.4 существует определенная на $I \times \mathbb{C}$ вектор-функция $\theta(t, \zeta) = (\theta_1(t, \zeta), \theta_2(t, \zeta))$ такая, что:

i) при любом фиксированном $t \in I = (-\infty, 0]$ функции $\theta_1(t, \zeta)$ и $\theta_2(t, \zeta)$ являются целыми вещественными функциями переменной ζ;

ii) $\theta_1(t, 0) = 1$, $\theta_2(t, 0) = 0$ при любом $t \in I$;

iii) при любом фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}$ вектор-функция $\theta(t, \zeta)$ является ненулевым решением канонического уравнения (4.1) на $(-\infty, 0]$;

iv) при любом фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t \to -\infty} \left(\overline{\theta_1(t, \zeta)}\theta_2(t, \zeta) - \theta_1(t, \zeta)\overline{\theta_2(t, \zeta)} \right) = 0.$$

Отсюда вытекают многие утверждения следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Если каноническое уравнение* (1.1) *на промежутке* $I = (-\infty, 0]$ *имеет дискретный спектр и* $a(t)$ *суммируема на* I, *то существует такая определенная на* $(-\infty, 0] \times \mathbb{C}$ *вектор-функция* $u(t, \zeta) = (u_1(t, \zeta), u_2(t, \zeta))$, *что*:

1) *при фиксированном* $t \in (-\infty, 0]$ *функции* $u_1(t, \zeta)$ *и* $u_2(t, \zeta)$ *являются целыми вещественными функциями переменной* ζ;

2) $u_1(t, 0) = 1$, $u_2(t, 0) = 0$ $\forall\, t \in (-\infty, 0]$;

3) *при фиксированном* $z \in \mathbb{C}$ $u(t, z)$ *является ненулевым решением канонического уравнения* (1.1) *на* $(-\infty, 0]$;

4) *при любом фиксированном* $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t \to -\infty} \left(u_1(t, \zeta)\overline{u_2(t, \zeta)} - \overline{u_1(t, \zeta)}u_2(t, \zeta) \right) = 0; \tag{4.2}$$

5) *при любом фиксированном* $t \in I$ *целые функции* $u_1(t, \zeta)$ *и* $u_2(t, \zeta)$ *переменной* ζ *не имеют общих нулей;*

6) *при любом фиксированном* $t \in I = (-\infty, 0]$ *функция* $\dfrac{u_2(t, \zeta)}{u_1(t, \zeta)}$ *является невырожденной* R-*функцией*.

Доказательство. Положим $u_j(t,\zeta) = T^{-1}\theta_j(t,\zeta) = \theta_j(-t,\zeta)$ $\forall\, t \in (-\infty, 0]$, $j = 1, 2$, и $u(t,\zeta) = (u_1(t,\zeta), u_2(t,\zeta))$. Поскольку $\theta(t,-\zeta)$ является решением уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}J = -x\mathcal{H}(t)\zeta$$

на $[0,+\infty)$, т. е. $(\theta(\cdot,\zeta), -\zeta\theta(\cdot,\zeta)) \in \tilde{l}$, в соответствии с приведенными выше свойствами преобразования T имеем $(u(\cdot,\zeta), \zeta u(\cdot,\zeta)) \in l$, т. е. $u(t,\zeta)$ — ненулевое решение уравнения (1.1) на $(-\infty, 0]$ при любом фиксированном ζ. Оно является ненулевым, ибо таково θ. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4 вытекает из утверждения iv), утверждение 2 — из утверждения ii), а утверждение 1 — из утверждения i).

Докажем утверждение 5. Допустим, что функции $u_1(t_0,\zeta)$ и $u_2(t_0,\zeta)$ при некотором фиксированном $t_0 \in I$ имеют общий нуль ζ_0. Тогда решение $u(t,\zeta_0) = (u_1(t,\zeta_0), u_2(t,\zeta_0))$ уравнения (1.1) с $\zeta = \zeta_0$ удовлетворяет условию $x|_{t=t_0} = (0,0)$. Поэтому $u(t,\zeta_0) = (0,0)$ $\forall\, t \in (-\infty, 0)$, что противоречит утверждению 3.

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in I$ и докажем, что $\dfrac{u_2(t_0,\zeta)}{u_1(t_0,\zeta)}$ является невырожденной R-функцией. Этим будет установлено утверждение 6 теоремы. Положив в (1.4) $t_2 = t_0$, $f(t) = v(t) = u(t,\zeta)$ и в соответствии с этим $w(t) = = g(t) = \zeta u(t,\zeta)$, получим

$$2\,\mathrm{Im}\,\zeta\int_{t_1}^{t_0} u(t,\zeta)\mathcal{H}(t)(u(t,\zeta))^* dt = \left(u_2(t,\zeta)\overline{u_1(t,\zeta)} - u_1(t,\zeta)\overline{u_2(t,\zeta)}\right)\Big|_{t=t_1}^{t=t_0}.$$

Устремив t_1 к $-\infty$, с учетом (4.2) будем иметь

$$2\,\mathrm{Im}\,\zeta\int_{-\infty}^{t_0} u(t,\zeta)\mathcal{H}(t)(u(t,\zeta))^* dt = u_2(t_0,\zeta)\overline{u_1(t_0,\zeta)} - u_1(t_0,\zeta)\overline{u_2(t_0,\zeta)}. \tag{4.3}$$

Пусть $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$. Докажем, что $u_1(t_0,\zeta) \neq 0$. Допустим, что $u_1(t_0,\zeta) = 0$. Тогда в соответствии с (4.3)

$$\int_{-\infty}^{t_0} u(t,\zeta)\mathcal{H}(t)(u(t,\zeta))^* dt = 0. \tag{4.4}$$

Функция $u(t,\zeta)$ удовлетворяет условиям A, B, C (с $u(\cdot,\zeta)$ вместо f) теоремы 9.1 из [11][6]: $u(\cdot,\zeta) \in \mathfrak{D}$ (условие A); справедливо (4.4) (условие B); $u(t_0,\zeta)\xi_0 = (u_1(t_0,\zeta),\, u_2(t_0,\zeta))\begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{pmatrix} = 0$ (условие C). Поскольку $u(t,\zeta) \neq (0,0)$ $\forall\, t \in (-\infty, t_0)$, согласно утверждению a) этой теоремы промежуток $(-\infty, t_0)$ — это $\mathcal{H}$-н.п. Его тип равен нулю, ибо в противном случае согласно утверждению c) этой теоремы $u_1(0,\zeta) = u_2(0,\zeta) = 0$, что противоречит утверждению 5 доказываемой теоремы. Итак, $(-\infty, t_0)$ — $\mathcal{H}$-н.п. типа нуль, т. е. $\mathcal{H}(t) = = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ при почти всех $t \in (-\infty, 0]$ и $a(t) = 1$ при почти всех $t \in (-\infty, t_0)$.

[6] Для удобства читателей в приложении, помещенном в конце статьи, приведена формулировка этой теоремы с неполным перечнем утверждений.

Это противоречит условию доказываемой теоремы. Итак, $u_1(t_0, \zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$. Попутно установлено, что равенство (4.4) не выполняется. Согласно (4.3)

$$2|u_1(t_0,\zeta)|^2 \operatorname{Im}\frac{u_2(t_0,\zeta)}{u_1(t_0,\zeta)} = 2\operatorname{Im}\zeta \int\limits_{-\infty}^{t_0} u(t,\zeta)\mathcal{H}(t)(u(t,\zeta))^* dt, \tag{4.5}$$

что доказывает утверждение 6 теоремы.

5. Некоторые сведения теории де Бранжа гильбертовых пространств целых функций. Основная теорема. ***5.1. Целые функции де Бранжа и определяемые ими пространства.*** Целую функцию E будем относить к классу $\mathcal{B}$, если она не имеет вещественных нулей, $E(0) = 1$ и $\left|E(\bar{\zeta})\right| < |E(\zeta)|$ при каждом $\zeta \in \mathbb{C}_+$.

Лемма 5.1. *Если* $A(\zeta)$ *и* $B(\zeta)$ — *целые вещественные функции,* $A(0) = 1$, $B(0) = 0$ *и* $A(\zeta) \neq 0$ $\forall \zeta \in \mathbb{C}_+$, *то функция* $E(\zeta) = A(\zeta) - iB(\zeta)$ *в том и только в том случае принадлежит* $\mathcal{B}$, *когда функция* $q(\zeta) := \dfrac{B(\zeta)}{A(\zeta)}$ *является* R*-функцией.*

Доказательство. Заметим сначала, что если $E \in \mathcal{B}$, то функции $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ не могут иметь невещественных нулей, ибо из вещественности этих функций следует, что нули каждой из них симметричны относительно вещественной оси и $|E(\zeta)| = \left|E(\bar{\zeta})\right|$ в нулях $\zeta \in \mathbb{C}_+$ этих функций, что противоречит принадлежности классу $\mathcal{B}$ функции E.

Из вещественности целых функций A и B следует, что $q(\bar{\zeta}) = \overline{q(\zeta)}$ $\forall \zeta \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$. Кроме того, при $\zeta \in \mathbb{C}_+$

$$\left(|E(\zeta)| > \left|E(\bar{\zeta})\right|\right) \Leftrightarrow \left(|A(\zeta) - iB(\zeta)| > \left|A(\bar{\zeta}) - iB(\bar{\zeta})\right|\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left|\frac{B(\zeta)}{A(\zeta)} + i\right| > \left|\frac{B(\bar{\zeta})}{A(\bar{\zeta})} + i\right|\right) \Leftrightarrow \left(|q(\zeta) - (-i)| > \left|q(\bar{\zeta}) + i\right|\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|q(\zeta) - (-i)| > |g(\zeta) - i|\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{Im} q(\zeta) > 0\right).$$

Лемма доказана.

Положим при любых комплексных ζ и w

$$K_E(w,\zeta) = \left(B(\zeta)\overline{A(w)} - A(\zeta)\overline{A(w)}\right) / (\zeta - \bar{w}), \tag{5.1}$$

где $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — целые вещественные функции в представлении $E(\zeta) = A(\zeta) - iB(\zeta)$ функции $E \in \mathcal{B}$. С функцией $E \in \mathcal{B}$ де Бранж ассоциирует гильбертово пространство $\mathfrak{H}(E)$ целых функций $\mathcal{F}$ таких, что

$$\|\mathcal{F}\|_E^2 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(x)/E(x)|^2 dx < \infty^7, \tag{5.2}$$

$$|\mathcal{F}(\zeta)| \leq \|\mathcal{F}\|_E \sqrt{K_E(\zeta,\zeta)}, \qquad \zeta \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \tag{5.3}$$

[7] Отметим, что в работах де Бранжа $\|\mathcal{F}\|^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(x)/E(x)|^2 dx$, а введенная им функция $K_E(w,\zeta)$ отличается от введенной здесь (см. (5.1)) множителем $1/\pi$. Неравенство же (5.3) сохранило свой вид. Введенные здесь изменения устраняют некоторые неудобства, связанные, главным образом, с каноническими уравнениями, о которых говорится в приведенных ниже теоремах де Бранжа; во многих формулах исчезает множитель π или $1/\pi$.

(заметим, что из леммы 5.1 вытекает положительность $K_E(\zeta, \zeta)$ при $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$). Скалярное произведение в нем будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$:

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle_E \; := \; \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\lambda) \overline{\mathcal{G}}(\lambda) | E(\lambda) |^{-2} d\lambda, \qquad \mathcal{F}, \; \mathcal{G} \in \mathfrak{H}(E).$$

Отметим, что при любом фиксированном $w \in \mathbb{C}$ функция $K_E(w, \zeta)$ принадлежит $\mathfrak{H}(E)$ и для любой функции $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(E)$

$$\mathcal{F}(w) \; := \; \langle \mathcal{F}, K_E(w, \cdot) \rangle_E \; := \; \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x) \overline{K_E(w, x)} | E(x) |^{-2} dx.$$

В частном случае, когда $E(\zeta)$ — четная функция, такие пространства изучались М. Г. Крейном в процессе развития им спектральной теории струны (см. [15], §5). В дальнейшем эти пространства будем называть К-Б-пространствами.

5.2. Весовые меры К-Б-пространств. Гамильтонианы де Бранжа.

Определение 5.1. *Неотрицательную на борелевых множествах из* $\mathbb{R}$ *меру* μ *называем весовой мерой пространства* $\mathfrak{H}(E)$, *если оно изометрически содержится в* $\mathcal{L}^{(2)}_{\mu}(-\infty, +\infty)$, *т. е.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(x)|^2 \, d\mu(x) \; = \; \|\mathcal{F}\|_E^2 \qquad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{H}(E). \tag{5.4}$$

Существование весовых мер пространства $\mathfrak{H}(E)$ вытекает из определения этого пространства. Приведенные ниже теоремы де Бранжа сформулированы на принятом здесь языке.

Теорема А ([2], теорема I). *Пусть* $\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ — *нормированный гамильтониан, определенный на промежутке* $I = (\mathcal{L}, +\infty)$ *с* $\mathcal{L} \geq -\infty$. *Пусть*

$$0 < \int_{\mathcal{L}}^{t} a(s) ds < \infty \qquad \forall t \in (\mathcal{L}, +\infty). \tag{5.5}$$

Пусть существует определенная на $I \times \mathbb{C}$ *вектор-функция* $u(t, \zeta) = (u_1(t, \zeta), u_2(t, \zeta))$ *такая, что*:

1) *при фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}$ *она является решением на* I *канонического уравнения*

$$\frac{dx}{dt} J \; = \; x \mathcal{H}(t) \zeta; \tag{5.6}$$

2) *при любом фиксированном* $t > \mathcal{L}$ *функции* $u_1(t, \zeta)$, $u_2(t, \zeta)$ — *целые вещественные функции, а функция* $E_t(\zeta) := u_1(t, \zeta) - i u_2(t, \zeta)$ *принадлежит* $\mathcal{B}$, *т. е.* $E_t(0) = 1$, $|E_t(\zeta)| > |E_t(\bar{\zeta})|$ $\forall \zeta \in \mathbb{C}_+$;

3) *при фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t \downarrow \mathcal{L}} \left(u_1(t, \zeta) \overline{u_2(t, \zeta)} - \overline{u_1(t, \zeta)} u_2(t, \zeta) \right) \; = \; 0. \tag{5.7}$$

Тогда:

i) $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(u_1(t, \zeta) \overline{u_2(t, \zeta)} - \overline{u_1(t, \zeta)} u_2(t, \zeta) \right) \; = \; \infty$ *при* $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$;

ii) *для любых $\mathcal{H}$-неособенных точек* $r, s \in (\mathcal{L}, +\infty)$, $r < s$, *пространство* $\mathfrak{H}(E_r)$ *изометрически содержится в пространстве* $\mathfrak{H}(E_s)$;

iii) *существует единственная неотрицательная на борелевых множествах из* $\mathbb{R}$ *мера* μ *такая, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2)^{-1} d\mu(\lambda) < \infty \tag{5.8}$$

и μ *является весовой мерой пространств* $\mathfrak{H}(E_t)$ *для всех* $\mathcal{H}$*-неособенных точек* $t \in I$, *а объединение всех таких пространств плотно в* $\mathcal{L}^{(2)}_{\mu}(-\infty, +\infty)$.

Теорема B ([2], теорема II). *Пусть функция* E *принадлежит* $\mathcal{B}$, *а* ν — *какая-нибудь весовая мера пространства* $\mathfrak{H}(E)$. *Тогда существуют определенный на некотором интервале* $(\mathcal{L}, +\infty)$ *нормированный гамильтониан* $\mathcal{H}(t)$, *удовлетворяющий всем условиям теоремы* A, *и такая* $\mathcal{H}$*-неособенная точка* $c \in (\mathcal{L}, +\infty)$, *что функция* $E_c(\zeta)$ *из теоремы* A *совпадает с* $E(\zeta)$, *а мера* ν — *с мерой* μ, *существование которой утверждает теорема* A.

***Следствие* 5.1.** *Если* $E \in \mathcal{B}$, *то существует такой определенный на некотором промежутке* $(\mathcal{L}, +\infty)$ *нормированный гамильтониан* $\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ *с функцией* $a(t)$, *удовлетворяющей условию* (5.5), *что при любом фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}$ *можно так подобрать решение* $u(t, \zeta) = (u_1(t, \zeta), u_2(t, \zeta))$ *уравнения* (5.6) *на* $(\mathcal{L}, +\infty)$, *что* $E_t(\zeta) = u_1(t, \zeta) - i u_2(t, \zeta)$ *при любом* $t \in (\mathcal{L}, +\infty)$ *принадлежит* $\mathcal{B}$, *выполняется условие* (5.7) *и* $E_0(\zeta) = E(\zeta)$ $\forall \zeta \in \mathbb{C}$.

Это вытекает из теоремы B, существования у пространства $\mathfrak{H}(E)$ хотя бы одной весовой меры и того, что за счет „сдвижки" $\mathcal{H}(t) \mapsto \mathcal{H}(t-c)$ можно добиться $\mathcal{H}$-неособенности точки 0 и совпадения E_0 с E.

***Замечание* 5.1.** Существуют различные гамильтонианы, имеющие свойства, указанные в следствии. Это вытекает хотя бы из того, что $\mathfrak{H}(E)$ имеет бесконечное множество весовых мер (см. ниже теорему D). Однако любые два из них совпадают при почти всех $t \in (\mathcal{L}, 0)$. Это вытекает из теорем де Бранжа из [16].

Определение 5.2. *Гамильтонианом де Бранжа будем называть гамильтониан* $\mathcal{H}(t)$, *существование которого утверждает следствие теоремы* B *для какой-нибудь функции* $E \in \mathcal{B}$.

Возникает следующий вопрос: при каких условиях определенный на $I = (\mathcal{L}, +\infty)$ нормированный гамильтониан является гамильтонианом де Бранжа?

Некоторый ответ на этот вопрос дает следствие 5.2 приведенной ниже теоремы 5.1.

Теорема 5.1. *Если вместо условия* 2, *налагаемого на вектор-функцию* $u(t, \zeta) = (u_1(t, \zeta), u_2(t, \zeta))$ *в теореме* A, *потребовать, чтобы хотя бы при одном значении* $t > \mathcal{L}$ *функции* $u_1(t, \zeta)$ *и* $u_2(t, \zeta)$ *были такими целыми вещественными функциями переменной* ζ, *что* $u_1(t, 0) = 1$, $u_2(t, 0) = 0$, *сохранив при этом все остальные требования, то все утверждения теоремы* A *остаются справедливыми.*

Доказательство. Пусть функции $u_1(t, \zeta)$ и $u_2(t, \zeta)$ являются целыми вещественными функциями переменной ζ при $t = t_0 \in (\mathcal{L}, +\infty)$. Пусть $W(t, \zeta)$ — такая матрица-функция, что $W(t_0, \zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$\frac{d}{dt}W(t,\zeta)J = \zeta W(t,\zeta)\mathcal{H}(t) \quad \forall t \in (\mathcal{L},+\infty), \quad \zeta \in \mathbb{C}_+.$$

Как известно (см. [3], теорема 38), элементы матрицы $W(t,\zeta)$ при любом фиксированном $t \in (\mathcal{L},+\infty)$ являются целыми вещественными. Поскольку

$$u(t,\zeta) = u(t_0,\zeta)\,W(t,\zeta) \qquad \forall t \in (\mathcal{L},+\infty),$$

$u_1(t,\zeta)$, $u_2(t,\zeta)$ являются целыми вещественными при любом фиксированном $t \in (\mathcal{L},+\infty)$ и $u(t,0) = (1,0)$ $\forall t \in (\mathcal{L},+\infty)$. Из доказательства утверждения 6 теоремы 4.1 следует, что $\dfrac{u_2(t,\zeta)}{u_1(t,\zeta)}$ является R-функцией переменной ζ при любом фиксированном $t \in (\mathcal{L},+\infty)$. Теперь из леммы 5.1 вытекает, что выполняется условие 2 теоремы А, а значит справедливы все утверждения этой теоремы.

***Следствие* 5.2.** *Является ли гамильтониан $\mathcal{H}(t)$, определенный на промежутке $(\mathcal{L},+\infty)$, гамильтонианом де Бранжа, зависит только от поведения $\mathcal{H}(t)$ в правой окрестности точки $\mathcal{L}$.*

***Замечание* 5.2.** Если $-\infty < \mathcal{L} < 0$, то любой нормированный гамильтониан, определенный на $(\mathcal{L},+\infty)$, является гамильтонианом де Бранжа.

Действительно, (5.5) выполняется, ибо гамильтониан нормирован, точку $\mathcal{L}$ можно присоединить к интервалу $(\mathcal{L},+\infty)$ и в качестве $u(t,\zeta)$ взять на $[\mathcal{L},+\infty)$ решение граничной задачи

$$\frac{dx}{dt}J = x\mathcal{H}(t)\zeta \qquad \forall x|_{t=\mathcal{L}} = (1;0).$$

Осталось ответить на поставленный выше вопрос, когда $\mathcal{L} = -\infty$.

***5.3.* Основная теорема.** *Для того чтобы определенный на $I = (-\infty,+\infty)$ нормированный гамильтониан с суммируемой на $(-\infty,0]$ функцией $a(t)$ был гамильтонианом де Бранжа, необходимо и достаточно, чтобы каноническое уравнение*

$$\frac{dx}{dt}J = x\mathcal{H}(t)\zeta \tag{5.9}$$

на промежутке $(-\infty,0]$ имело дискретный спектр.

Достаточность этого условия вытекает из теоремы 4.1 и леммы 5.1.

Ниже мы докажем его *необходимость.* Для этого напомним еще две теоремы де Бранжа.

Теорема С ([3], теорема III). *Пусть $I = (-\infty,+\infty)$, а $\mathcal{H}(t)$ и $u(t,\zeta)$ такие, как в теореме* А, *c — $\mathcal{H}$-неособенная точка из I, $\hat{H}_c$ — множество таких вектор-функций $f \in \hat{H}$, что $f(t) = (0,0)$ $\forall t > c$, $\hat{\mathfrak{H}}_c$ — множество элементов $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}$, изображаемых вектор-функциями $f \in \hat{H}_c$ и $\hat{S}_c$ — оператор, построенный в $\hat{\mathfrak{H}}_c$ с помощью линейного отношения l, соответствующего гамильтониану $\mathcal{H}$, рассматриваемому на промежутке $(-\infty,c]$, как в п.* 1 *при построении оператора $\hat{S}$. Тогда*:

I. *Вектор-функция $\chi(c,t)u(t,\zeta)$, где $\chi(c,t)$ — характеристическая функция промежутка $(-\infty,c]$, при фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}$ принадлежит $\hat{H}_c$, и поэтому для любого элемента $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}_c$ определен образ $\mathcal{F}$ в „преобразовании Фурье" $V_c : \mathfrak{f} \mapsto \mathcal{F}$, задаваемом равенством*

$$\mathcal{F}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathcal{H}(t)(u(t,\bar{\zeta}))^* dt, \qquad f \in \mathfrak{f}.$$

Функция $\mathcal{F} = U\mathfrak{f}$ *принадлежит* $\mathfrak{H}(E_c)$ *и*

$$\|\mathcal{F}(\zeta)\|^2_{E_c} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathcal{H}(t)(f(t))^* dt \quad \left(= \|\mathfrak{f}\|^2_{\hat{\mathfrak{H}}} = \|\mathfrak{f}\|^2_{\hat{\mathfrak{H}}_c}\right).$$

Более того, любой элемент пространства $\mathfrak{H}(E_c)$ *является образом в преобразовании* V_c *некоторого элемента* $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{H}}_c$.

II. *Если* $\mathcal{F}$ — *образ в преобразовании* V_c *элемента* $\mathfrak{f}$ *из* $\mathfrak{H}_c$, *то для того чтобы элемент* $\mathfrak{f}$ *принадлежал* $\mathfrak{D}(\hat{S}_c)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\mathcal{G}(\zeta) = \zeta\mathcal{F}(\zeta)$ *принадлежала* $\mathfrak{H}(E_c)$. *При этом* $\mathcal{G}(\zeta)$ *является образом элемента* $\mathfrak{g} = \hat{S}_c\mathfrak{f}$ *в преобразовании* V_c.

Иными словами, преобразование V_c *изометрически переводит оператор* $\hat{S}_c$ *в оператор умножения на независимую переменную в пространстве* $\mathfrak{H}(E_c)$.

Следствие теоремы C. *Пусть* $\mathcal{H}(t)$ — *гамильтониан де Бранжа на промежутке* $(-\infty, +\infty)$. *Если* μ — *весовая мера пространства* $\mathfrak{H}(E_0)$, *то преобразование* V_0, *о котором говорится в теореме* C, *при* $c = 0$ *переводит изометрически оператор* $\hat{S}_0$ *в часть оператора умножения на независимую переменную в пространстве* $\mathcal{L}^{(2)}_\mu(-\infty, +\infty)$ *и, следовательно, в случае, когда носитель меры* μ *дискретен, оператор* $\hat{S}_0$ *имеет самосопряженное расширение с дискретным спектром, возможно, с выходом из* $\hat{\mathfrak{H}}_0$, *а значит дискретный спектр имеет уравнение* (5.9) *на* $(-\infty, 0]$ (*см. определение* 1.9).

Для того чтобы доказать часть основной теоремы, утверждающую необходимость, осталось установить, что любое пространство де Бранжа имеет весовую меру с дискретным носителем. Это будет показано ниже.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ множество голоморфных в $\mathbb{C}_+$ функций U таких, что $|U(\zeta)| \le 1 \ \forall z \in \mathbb{C}_+$. Описание множества всех весовых мер пространства $\mathfrak{H}(E)$ с $E \in \mathcal{B}$ дает следующая теорема.

Теорема D ([17], теорема V-A). *Пусть* μ — *неотрицательная мера борелевых множеств из* $\mathbb{R}$ *и для каждого борелева множества* K

$$\tau(K) = \int_K |E(\lambda)|^2 d\mu(\lambda). \tag{5.10}$$

Тогда для того чтобы μ *была весовой мерой пространства* $\mathfrak{H}(E)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $U \in \mathfrak{U}$ *такая, что при* $\operatorname{Im}\zeta > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,d\tau(\lambda)}{|\lambda - \zeta|^2} = \operatorname{Re}\frac{E(\zeta) + E^*(\zeta)U(\zeta)}{E(\zeta) - E^*(\zeta)U(\zeta)}, \tag{5.11}$$

где $y = \operatorname{Im}\zeta$ *и* $E^*(\zeta) := \overline{E(\bar{\zeta})}$.

Положим

$$\omega_U(\zeta) = i\frac{E(\zeta) + E^*(\zeta)U(\zeta)}{E(\zeta) - E^*(\zeta)U(\zeta)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{Re}\frac{E(\zeta) + E^*(\zeta)U(\zeta)}{E(\zeta) - E^*(\zeta)U(\zeta)} = \operatorname{Im}\omega_U(\zeta). \tag{5.12}$$

Обозначим через ω_+ функцию ω_U с $U(\zeta) \equiv 1$, а через ω_- функцию ω_U с $U(z) \equiv -1$. Если, как обычно, $E(\zeta) = A(\zeta) - iB(\zeta)$, где $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — целые вещественные функции, то $E^*(\zeta) = A(\zeta) + iB(\zeta)$ и, следовательно,

$$\omega_+(\zeta) = -\frac{A(\zeta)}{B(\zeta)}, \qquad \omega_-(\zeta) = \frac{B(\zeta)}{A(\zeta)}. \tag{5.13}$$

Поэтому $\omega_+(\zeta)$ и $\omega_-(\zeta)$ — мероморфные R-функции (см. лемму 5.1). Имеют место представления

$$\begin{aligned} \omega_+(\zeta) &= \alpha_+ + \beta_+\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)d\tau_+(\lambda), \\ \omega_-(\zeta) &= \alpha_- + \beta_-\zeta + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\zeta} - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)d\tau_-(\lambda), \end{aligned} \tag{5.14}$$

где $\alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{R}$, $\beta_+ \geq 0$, $\beta_- \geq 0$, а τ_+ и τ_- — неотрицательные меры, причем

$$\begin{aligned} \beta_+ &= \lim_{y\uparrow+\infty} (\omega_+(iy)\cdot(iy)^{-1}), \\ \beta_- &= \lim_{y\uparrow+\infty} (\omega_-(iy)\cdot(iy)^{-1}). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из (5.14) вытекает, что при $\zeta = x + iy$, $y > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\omega_+(\zeta) &= \beta_+ y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,d\tau_+(\lambda)}{|\lambda-\zeta|^2}, \\ \operatorname{Im}\omega_-(\zeta) &= \beta_- y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,d\tau_-(\lambda)}{|\lambda-\zeta|^2}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Из (5.13) и (5.15) следует, что хотя бы одно из чисел β_+, β_- равно нулю, а потому согласно (5.16) и теореме D хотя бы одна из мер

$$\mu_+(K) = \int_K |E(\lambda)|^{-2}d\tau_+(\lambda),$$

$$\mu_-(K) = \int_K |E(\lambda)|^{-2}d\tau_-(\lambda)$$

является весовой мерой пространства $\mathfrak{H}(E)$. Поскольку R-функции ω_- и ω_+ мероморфны, носители мер τ_+ и τ_-, а значит и мер μ_+ и μ_-, дискретны, т. е. не имеют предельных точек, отличных от ∞.

Это завершает доказательство части основной теоремы, утверждающей необходимость.

В заключение этого пункта отметим, что в работе [1] приведены в терминах поведения гамильтониана на сингулярном конце необходимое и достаточное условия дискретности канонического дифференциального уравнения на промежутке с одним сингулярным концом. К сожалению, эти условия не совпадают, однако, весьма близки между собой.

Приложение. Формулировка части теоремы 9.1 из работы [11]. *Пусть вектор-функция* $f = (f_1, f_2)$ *обладает следующими свойствами*:

A) $f \in \mathfrak{D}$, *т.е.* f *абсолютно непрерывна на* $I = [0, +\infty)$ *и для некоторой вектор-функции* g

$$f'(t)J = g(t)\mathcal{H}(t) \quad \text{при почти всех} \quad t \in I;$$

B) $f \in \theta$, *т.е.*

$$f(t)\mathcal{H}(t) = (0, 0) \quad \text{при почти всех} \quad t \in I;$$

C) $f(0)\xi_0 = 0$.

Тогда:

a) *если* $(\alpha, \beta) \subset I$ *и* $f(t) \neq (0, 0)$ *при всех* $t \in (\alpha, \beta)$, *то* $[\alpha, \beta]$ — $\mathcal{H}$-*н.п.;*

c) *если* $[0, \beta]$ — $\mathcal{H}$-*н.п. и его тип отличен от* $0 \,(\operatorname{mod} \pi)$, *то* $f(0) = (0, 0)$.

1. *Кац И. С.* Критерий дискретности спектра сингулярной канонической системы // Функцион. анализ и его прил. – 1995. – **29**, № 3. – С. 75 – 78.
2. *de Branges L.* Hilbert spaces of entire functions. III // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **100**. – P. 73 – 115.
3. *de Branges L.* Hilbert spaces of entire functions. – London: Prentice-Hall, 1968. – 326 p.
4. *Кац И. С.* О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями // Зап. НИИ математики и механики Харьков. ун-та и Харьков. мат. о-ва. – 1950. – **22**. – С. 95 – 113.
5. *Arnes R.* Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. – 1961. – **11**. – P. 9 – 23.
6. *Coddington E. A.* Self-adjoint subspace extensions of non-densely defined symmetric subspaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973.– **79**. – P. 712 – 715.
7. *Coddington E. A.* Self-adjoint problems for nondensely defined ordinary differential operators and their eigenfunction expansions // Adv. Math. – 1975. – **15**. – P. 1 – 40.
8. *de Branges L.* Some Hilbert spaces of entire functions. II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **96**. – P. 259 – 295.
9. *Кац И. С.* Линейные отношения, порождаемые каноническими дифференциальными уравнениями // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, № 4. – С. 86 – 87.
10. *Кац И. С.* Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением на интервале с регулярным концом, и разложимость по собственным функциям. – Одесса, 1984. – 49 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 1453.
11. *Кац И. С.* Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением фазовой размерности 2, и разложимость по собственным функциям // Алгебра и анализ. – 2002. – **14**, № 3. – С. 86 – 120.
12. *Кац И. С., Крейн М. Г.* *R*-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя: Доп. 1 к кн. „Дискретные и непрерывные граничные задачи” / Ф. Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
13. *Крейн М. Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. – 1948. – **10**. – С. 83 – 106.
14. *Крейн М. Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Избр. тр. Книга II. – Киев: НАН Украины, 1996. – С. 172 – 203.
15. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральных функциях струны: Доп. 2 к кн. „Дискретные и непрерывные граничные задачи” / Ф. Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
16. *de Branges L.* Some Hilbert spaces of entire functions. IV // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **105**. – P. 43 – 83.
17. *de Branges L.* Some Hilbert spaces of entire functions // Ibid. – 1960. – **96**. – P. 259 – 295.

Получено 22.01.2007