УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВІДНОВЛЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО ТИПУ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ КОНФЛІКТУ*

Regeneration conditions of a pure spectral type (purely point, purely absolutely continuous, or purely singularly continuous) in limiting distributions of dynamical systems with the alternative conflict composition are obtained. In particular, it is shown, that the point spectrum may be regenerated starting from states with purely singularly continuous spectrum.

Получены условия восстановления чистого спектрального типа (чисто точечного, чисто абсолютно непрерывного или чисто сингулярно непрерывного) в граничных распределениях динамических систем с композицией альтернативного конфликта. В частности, показано, что точечный спектр можно регенерировать исходя из состояний с чисто сингулярно непрерывным спектром.

1. Вступ. У цій статті досліджуються спектральні властивості граничних розподілів динамічних систем конфлікту в дискретному часі. В найпростішому випадку динамічна система конфлікту породжується парою ймовірнісних мір μ та ν на відрізку $[0, 1]$, що зосереджені на структурно подібних множинах (див. нижче). Еволюція в цих системах задається композицією альтернативного конфлікту $\circledast$, яка по суті є перетворенням у просторі пар мір:

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{\circledast} \{\mu^N, \nu^N\}, \quad \mu^0 = \mu, \quad \nu^0 = \nu, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

У роботах [1, 2] (див. також [3]) доведено існування граничних станів такої динамічної системи:

$$\mu^\infty = \lim_{N\to\infty} \mu^N, \quad \nu^\infty = \lim_{N\to\infty} \nu^N,$$

які є інваріантними відносно дії композиції $\circledast$. Наступна задача полягає в дослідженні спектральної структури носіїв граничних мір μ^∞, ν^∞. У роботах [4, 5] показано, що ці міри задовольняють аналоги відомої теореми Джессена – Вінтнера [6] і тому мають чистий спектральний тип, тобто є або чисто точковими, або чисто абсолютно неперервними, або чисто сингулярно неперервними. Крім того, знайдено достатні умови (а в найпростішому випадку з двома позиціями конфлікту — критерії) того, що спектр (носій) граничних мір має фіксований спектральний тип.

Ми будемо досліджувати в певному сенсі обернену задачу. Витоки такої задачі можна знайти в статті [7]. Як відновити спектральний тип хоча б однієї з мір, змінений або втрачений в результаті конфліктної взаємодії? Задача є складною, і тут одержано лише окремі результати. Зокрема, доведено, що в класі структурно подібних мір початковий тип спектра однієї з мір можна відновити. Більш того, показано, що точковий тип спектра можна регенерувати навіть у випадку, коли після конфліктної взаємодії граничні міри мають чисто сингулярно неперервний спектр, який і досі не має загальноприйнятого фізичного сенсу. Основним результатом статті є теорема 6, яка містить критерій відновлення чисто точкового спектрального типу. Наведено також ряд простих достатніх умов належності граничної міри до певного спектрального типу.

Позначимо через A та B пару фізичних об'єктів, які час від часу вступають у конфронтацію чи конфлікт (див. [8 – 10]). Такі об'єкти будемо називати опонентами або протилежними сторонами у тому розумінні, що їхні „життєві інтереси" перетинаються, тобто A та B мають спільний простір „існування", який позначимо Ω. Для побудови математичної моделі в якості Ω виберемо скін-

* Частково підтримано проектом DFG 436 UKR 113/78.

ченну дискретну множину точок (позицій конфлікту) або компактну підмножину метричного простору, наприклад відрізок $[0, 1]$. Початкові розподіли життєвих інтересів опонентів задаються на Ω імовірнісними мірами $\mu = \mu_A$ та $\nu = \nu_B$ відповідно. Конфронтація між A та B відбувається в дискретному часі $t = 1, 2, \ldots, N, \ldots$ і математично визначається некомутативним перетворенням $\ast$ (композицією конфлікту) в просторі мір. Ця композиція породжує динамічну систему конфлікту в просторі структурно подібних мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}([0, 1])$ (означення див. у наступному пункті). В роботах [2 – 5] показано, що, за винятком крайніх випадків, для довільної пари початкових мір $\mu^0 = \mu$, $\nu^0 = \nu$ траєкторія динамічної системи конфлікту $\{\mu^N, \nu^N\}$ прямує до нерухомої точки, якій відповідає пара граничних мір μ^∞, ν^∞.

Ми зосередимо увагу на наступних питаннях. Коли хоча б одна гранична міра, скажімо μ^∞, є чисто точковою: $\mu^\infty = \mu^\infty_{\text{pp}}$? Якщо одна з початкових мір була чисто точковою, $\mu = \mu_{\text{pp}}$, а на границі стала чисто сингулярною, $\mu^\infty = \mu^\infty_{\text{sc}}$, то чи існує міра ν' така, що при побудові нової динамічної системи конфлікту з початковою парою μ^∞, ν' нова гранична міра $(\mu^\infty)^\infty$ стане знову чисто точковою? Іншими словами, чи можна відновити точковий тип спектра міри $\mu = \mu_{\text{pp}}$, який втрачається в конфліктній взаємодії з мірою ν? Відзначимо, що виникнення сингулярно неперервного спектра є характерним явищем в теорії конфлікту. Водночас належність μ^∞ до точкового типу потребує виконання досить специфічних умов. Як правило, конфліктна взаємодія між опонентами A та B, яким відповідають різні точкові або абсолютно неперервні міри μ та ν, приводить до граничних станів μ^∞_{sc}, ν^∞_{sc} з сингулярним ніде не щільним фрактальним [11] спектром.

Тому задача про знаходження умов, які забезпечують відновлення точкового типу спектра, втраченого в результаті конфліктної взаємодії, є актуальною. Основою дослідження є робота [12], де знайдено явні формули для опису граничних розподілів для дискретних мір. Спираючись на ці результати, ми тут одержимо як прості достатні умови, так і критерій для відновлення точкового спектрального типу для структурно подібних мір на $[0, 1]$.

Зазначимо, що в роботах [13, 14] (див. також [15]) на основі композиції конфлікту $\ast$ побудовано значно складніші динамічні системи, які описують, зокрема, процеси міграції, соціальної конфронтації та кооперації. В таких моделях спектральний тип граничних мір не є стійким і може під час еволюції осцилювати і неодноразово наближатися як до сингулярно неперервного, так і до точкового, і навіть до абсолютно неперервного. Точні результати, одержані в цьому напрямку, будуть викладені в наступних публікаціях.

2. Клас мір зі структурно подібним носієм. Компактну множину $S \subseteq \mathbb{R}$ називають *структурно подібною*, якщо при кожному $\varepsilon > 0$ вона розкладається в об'єднання скінченної кількості подібних підмножин із діаметрами, що не перевищують ε:

$$S = \bigcup_{j=1}^{M_\varepsilon < \infty} s_j, \quad \operatorname{diam}(s_j) \le \varepsilon, \quad s_j \approx s_l, \quad j, l = 1, 2, \ldots, M_\varepsilon, \tag{1}$$

при цьому

$$\lambda(s_j^{\text{cl}} \cap s_l^{\text{cl}}) = 0, \quad j \ne l,$$

де $\approx$ позначає подібність, s_j^{cl} — замикання множини s_j, λ — міра Лебега. Іншими словами, структурно подібна множина на довільному ε-рівні складається з скінченної кількості подібних „цеглинок”.

Міру μ на $\mathbb{R}$ називають структурно подібною, якщо її носій $\operatorname{supp}\mu = S$ є структурно подібною множиною.

В подальшому будемо використовувати лише підклас імовірнісних мір на відрізку $[0, 1]$, носії яких є структурно подібними. Усю множину таких мір позначимо $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}([0, 1]) \equiv \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ (ss = structural similarity) і визначимо таким чином.

Розглянемо пару стохастичних матриць вигляду

$$Q = \{\mathbf{q}_k\}_{k=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1k} & \cdots \\ q_{21} & \cdots & q_{2k} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nk} & \cdots \end{pmatrix} \equiv \{q_{ik}\}_{i=1,k=1}^{n,\infty} \tag{2}$$

та

$$P \equiv \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots \\ p_{21} & \cdots & p_{2k} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nk} & \cdots \end{pmatrix} \equiv \{p_{ik}\}_{i=1,k=1}^{n,\infty}, \tag{3}$$

стовпчики яких утворюють стохастичні вектори $\mathbf{q}_k$ та $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$:

$$\mathbf{q}_k = (q_{1k}, q_{2k}, \ldots, q_{nk}), \quad q_{1k}, \ldots, q_{nk} > 0, \quad q_{1k} + \ldots + q_{nk} = 1,$$

$$\mathbf{p}_k = (p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk}), \quad p_{1k}, \ldots, p_{nk} \geq 0, \quad p_{1k} + \ldots + p_{nk} = 1.$$

Припустимо, що виконується умова

$$q_{\inf} := \inf_{ik} q_{ik} > 0. \tag{4}$$

Матриця (2) фіксує на $[0, 1]$ так зване Q-зображення дійсних чисел [6, 16, 17]. Воно задається таким чином. Інтервал $[0, 1]$ розкладається зліва направо в множину інтервалів $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \ldots, \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots$ рангу $1, 2, \ldots, k, \ldots$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i_1=1}^{n} \Delta_{i_1} = \bigcup_{i_1, i_2=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2} = \ldots = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \ldots .$$

При цьому вимагається, що різні інтервали фіксованого рангу перетинаються лише в крайніх точках, їх довжини визначаються елементами матриці Q,

$$\lambda(\Delta_{i_1}) = q_{i_1 1}, \ \lambda(\Delta_{i_1 i_2}) = q_{i_1 1} q_{i_2 2}, \ldots, \lambda(\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}) = q_{i_1 1} q_{i_2 2} \cdots q_{i_k k}, \ldots,$$

а об’єднання є узгодженими:

$$\Delta_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2}, \ \ldots, \ \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ \ldots .$$

Неважко зрозуміти, що σ-алгебра, породжена сім’єю підмножин $\{\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, збігається з борелевою σ-алгеброю на $[0, 1]$. Зокрема, для кожної точки $x \in$ $\in [0, 1]$ існує послідовність вкладених інтервалів $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset$ $\supset \ldots$, які в перетині містять лише цю точку:

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

При фіксованому Q-зображенні відрізка $[0, 1]$ кожна стохастична матриця (3) задає деяку борелеву міру μ як границю послідовності кусково рівномірно розподілених імовірнісних мір: $\mu = \lim_{k\to\infty}\mu_k$, де μ_k визначаються першими k стовпчиками матриць Q та P,

$$\mu_k := \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{\infty} c_{i_1 i_2 \ldots i_k} \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \qquad c_{i_1 i_2 \ldots i_k} := \frac{p_{i_1 1} p_{i_2 2} \cdots p_{i_k k}}{q_{i_1 1} q_{i_2 2} \cdots q_{i_k k}}. \tag{5}$$

Тут $\lambda_{i_1 i_2 \ldots i_k} := \lambda \restriction \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ позначає звуження міри Лебега на відрізок $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. З (5) видно, що

$$\mu_1(\Delta_{i_1}) = p_{i\,1},\ \mu_2(\Delta_{i_1 i_2}) = p_{i_1 1} p_{i_2 2}, \ldots, \mu_k(\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}) = p_{i_1 1} p_{i_2 2} \cdots p_{i_k k}, \ldots. \tag{6}$$

З (5), (6) випливає, що функція розподілу $f_k(x) = \mu_k\{[0, x]\}$ міри μ_k має графік (кусково лінійної) неспадної ламаної лінії. При цьому значення функції $f_k(x)$, $k > 1$, в кінцевих точках інтервалів $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ рангу $k-1$ ті самі, що і значення функції $f_{k-1}(x)$. Неважко зрозуміти, що послідовність $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ поточково майже скрізь збігається, $f_k(x) \to f(x)$, $k \to \infty$, де $f(x)$ є неперервною справа неспадною функцією, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. За побудовою $f(x)$ є функцією розподілу деякої міри μ, яка належить до класу $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}([0, 1])$. Це випливає з того, що на усіх інтервалах $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $k \geq 1$, міра μ будується подібною процедурою і $\lambda(\Delta_{i_1, \ldots, i_k}) \to 0$, $k \to \infty$, завдяки умові (4).

Характерна особливість класу мір $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ полягає в тому, що такі міри завжди мають лише одну компоненту в розкладі Лебега: або точкову, або абсолютно неперервну, або сингулярно неперервну. Цей факт про чистоту спектра (носія) міри $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ випливає з аналога відомої теореми Джессена – Вінтнера (див. [6]). Його можна сформулювати таким чином.

Для мір із класу $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ пишемо $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$ (позначенням ss нехтуємо), якщо міра μ є чисто точковою $(\mu = \mu_{\mathrm{pp}})$, чисто абсолютно неперервною $(\mu = \mu_{\mathrm{ac}})$ або чисто сингулярно неперервною $(\mu = \mu_{\mathrm{sc}})$ відповідно. Позначимо

$$P_{\max}(\mu) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\}, \qquad \rho(\mu, \lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_{ik} q_{ik}} \right).$$

Теорема 1. *Кожна міра* $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ *має чистий спектральний тип*:

a) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, *лише якщо* $P_{\max}(\mu) > 0$;

b) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, *лише якщо* $\rho(\mu, \lambda) > 0$;

c) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$, *лише якщо* $P_{\max}(\mu) = 0$ *та* $\rho(\mu, \lambda) = 0$.

Доведення твердження a) наведено в [17]. Ідея доведення тверджень b), c) ґрунтується на теоремі Какутані [18, 19] щодо мір, які є нескінченними прямими добутками послідовності мір. Так, для стохастичної матриці P (аналогічно для Q) розглядається послідовність імовірнісних просторів $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, m_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, де множина $\Omega_k = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ та σ-алгебра $\mathcal{A}_k$ є однаковими для всіх k, а для мір m_k виконуються рівності $m_k(\omega_i) = p_{ik}$. Нехай $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, m^*) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, m_k)$ позначає нескінченний прямий добуток таких дискретних імовірнісних просторів. Варто зазначити, що міра m^* взаємно однозначно асоційована з матрицею P. Дійсно, за побудовою, на циліндричних множинах $\Omega_{i_1\ldots i_k} := \omega_{i_1}\times\omega_{i_2}\times\ldots\times\omega_{i_k}\times\prod_{s=1}^{\infty}\Omega_{k+s}\subset\Omega^*$

$$m^*(\Omega_{i_1\ldots i_k}) = \prod_{l=1}^{k} p_{i_l l}.$$

Розширення такої міри на довільну підмножину з σ-алгебри $\mathcal{A}^*$ визначається стандартним чином (див., наприклад, [20]). Виявляється, що міри m^* та μ тісно пов'язані, оскільки $m^*(\Omega_{i_1\ldots i_k}) = \mu_k(\Delta_{i_1\ldots i_k})$ (див. (5)). Більш докладно, цей зв'язок встановлюється за допомогою вимірного відображення π з Ω^* в $[0, 1]$, яке визначають таким чином:

$$\pi:\ \Omega^*\ni\omega^* = \{\omega_{i_1}\times\omega_{i_2}\times\ldots\times\omega_{i_k}\times\ldots\}\to x = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k}\in[0, 1].$$

При цьому може виникнути потреба звузити π на множину $\Omega^*\setminus\Omega_0^*$, де $\mu^*(\Omega_0^*) = 0$. Тоді $\mu(E) = m^*(\pi^{-1}(E))$ для довільної борелевої множини E з $[0, 1]$, де $\pi^{-1}(E) := \{\omega^*\in\Omega^*\setminus\Omega_0^* :\ \pi(\omega^*)\in E\}$. В такому разі міру μ називають образ-мірою міри m^* відносно відображення π. Тепер твердження b), c) є наслідками теореми Какутані [18] (докладніше див. [17]).

3. Динамічна система конфлікту. Динамічна система конфлікту будується в прямому добутку просторів $\mathcal{M}^{ss}\times\mathcal{M}^{ss}$ таким чином. При фіксованому Q-зображенні відрізка $[0, 1]$ розглядається пара мір $\mu, \nu\in\mathcal{M}^{ss}$, асоційованих із стохастичними матрицями P та $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{\infty}$. До них застосовується некомутативне перетворення $\divideontimes$ (композиція конфлікту):

$$\mu^1 = \mu\divideontimes\nu, \qquad \nu^1 = \nu\divideontimes\mu,$$

де кожна з мір μ^1, ν^1 знову належить простору $\mathcal{M}^{ss}$. Ці міри асоційовані з стохастичними матрицями $P^1 = \{\mathbf{p}_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $R^1 = \{\mathbf{r}_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, де нові стохастичні вектори $\mathbf{p}_k^1$, $\mathbf{r}_k^1$ визначаються композицією конфлікту $\divideontimes$ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n > 1$:

$$\mathbf{p}_k^1 = \mathbf{p}_k\divideontimes\mathbf{r}_k, \qquad \mathbf{r}_k^1 = \mathbf{r}_k\divideontimes\mathbf{p}_k.$$

Координати p_{ik}^1, r_{ik}^1, $i = 1, \ldots, n$, векторів $\mathbf{p}_k^1$, $\mathbf{r}_k^1$ обчислюються за формулами

$$p_{ik}^1 := \frac{p_{ik}(1 - r_{ik})}{z_k}, \qquad r_{ik}^1 := \frac{r_{ik}(1 - p_{ik})}{z_k}, \tag{7}$$

де дільник $z_k = 1 - (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k)$ ($(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$) забезпечує умову стохастичності нових векторів:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik}^{1} = \sum_{i=1}^{n} r_{ik}^{1} = 1.$$

З (7) видно, що координати ортогональних векторів залишаються незмінними відносно дії $\ast$. Зрозуміло також, що для коректності формул (7) слід вимагати, щоб $(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1$ для кожного k. Ця умова автоматично буде виконуватися при ітераціях композиції $\ast$, якщо вона мала місце на першому кроці.

Формули (7) мають наступну інтерпретацію. При $k = 1$ число p_{i1}^{1} дорівнює ймовірності для опонента A знаходитись у регіоні Δ_{i_1} після першого кроку конфліктної взаємодії з опонентом B. Ця ймовірність пропорційна добутку початкової ймовірності p_{i1} для A перебувати в Δ_{i_1} на $1 - r_{i1}$ — ймовірності того, що опонент B в цьому регіоні відсутній. Аналогічний сенс має r_{i1}^{1}. Неважко показати, числа p_{i1}^{1}, r_{i1}^{1} є умовними ймовірностями одночасної взаємовиключної (альтернативної) присутності опонента A чи B по усіх регіонах Δ_{i_1}, $i = 1, \ldots, n$. Аналогічний сенс мають числа p_{ik}^{1}, r_{ik}^{1} для будь-якого k.

Ітерація композиції $\ast$ у просторі $\mathcal{M}^{ss} \times \mathcal{M}^{ss}$ породжує динамічну систему конфлікту в дискретному часі:

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{\ast} \{\mu^{N}, \nu^{N}\}, \quad N = 1, 2, \ldots, \quad \mu^0 = \mu, \quad \nu^0 = \nu. \tag{8}$$

Наступна теорема стверджує, що кожна траєкторія динамічної системи (8) збігається до інваріантного граничного стану.

Теорема 2. *Для довільної пари початкових мір* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{ss}$ *з умовою*

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1 \qquad \forall k \tag{9}$$

існують інваріантні відносно дії $\ast$ *граничні міри* $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}^{ss}$ *у сенсі поточкової збіжності майже скрізь відповідних функцій розподілу*:

$$\mu^\infty = \lim_{N\to\infty} \mu^N, \qquad \nu^\infty = \lim_{N\to\infty} \nu^N.$$

При цьому $\mu^\infty \perp \nu^\infty$, *якщо* $\mu \neq \nu$, *та* $\mu^\infty = \nu^\infty$, *якщо* $\mu = \nu$.

Зазначимо, що умова (9) (далі припускаємо, що вона завжди виконується) означає, що рівність $p_{ik} = r_{ik} = 1$ ніколи не виникає. Існування граничних мір μ^∞, ν^∞ випливає з існування граничних стохастичних векторів

$$\mathbf{p}_k^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{p}_k^N, \qquad \mathbf{r}_k^\infty = \lim_{N\to\infty} \mathbf{r}_k^N, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

що доведено в більш загальному контексті в теоремі про конфлікт (див. [1, 2]). Послідовності граничних векторів $\mathbf{p}_k^\infty$, $\mathbf{r}_k^\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, формують пару стохастичних матриць P^∞, R^∞, з якими, згідно з побудовами п. 2, асоційовані міри μ^∞, ν^∞ з простору $\mathcal{M}^{ss}$. Властивості $\mu^\infty \perp \nu^\infty$, або $\mu^\infty = \nu^\infty$ також є наслідками теореми про конфлікт.

Неважко знайти явну формулу для значень граничних мір μ^∞, ν^∞ на інтервалах $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Для цього необхідно навести допоміжні результати. Для пари різних і неортогональних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ позначимо

$$D := \sum_{i\in\mathbb{N}_+} d_i = -\sum_{i\in\mathbb{N}_-} d_i,$$

де

$$d_i = p_i - r_i, \quad \mathbb{N}_+ := \{i : d_i > 0\}, \quad \mathbb{N}_- := \{i : d_i < 0\}.$$

Зазначимо, що $0 < D \le 1$, оскільки $\mathbf{p} \ne \mathbf{r}$. Рівність $\sum_{i\in\mathbb{N}_+} d_i = -\sum_{i\in\mathbb{N}_-} d_i$ випливає з того, що $\sum_i p_i - \sum_i r_i = 0$.

Теорема 3. *Якщо* $\mathbf{p} \ne \mathbf{r}$, *то координати граничних векторів* $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$ *мають наступний явний опис*:

$$p_i^\infty = \begin{cases} \dfrac{d_i}{D}, & i \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_+, \end{cases} \qquad r_i^\infty = \begin{cases} -\dfrac{d_i}{D}, & i \in \mathbb{N}_-, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_-. \end{cases} \tag{10}$$

Якщо початкові вектори рівні, $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \ne 1$, *то граничні вектори також рівні*, $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, *і більш того, їх координати рівномірно розподілені*: $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$, *де* $m \le n$ *позначає кількість ненульових координат векторів* $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$.

Доведення наведемо лише фрагментарно (детальніше див. ([12])). Якщо $\mathbf{p} \ne \mathbf{r}$, але $p_i = r_i$ для якогось i, то в [2] показано, що координати $p_i^N = r_i^N$ збігаються до нуля, $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$. Більш того, якщо d_i не є строго додатним, то ітерація формул (7) показує (докладніше див. [1, 2, 12]), що і в такому разі $p_i^N \to 0$, $N \to \infty$. Це означає, що $p_i^\infty = 0$ для всіх $i \notin \mathbb{N}_+$. Аналогічно, $r_i^N \to 0$, якщо $i \notin \mathbb{N}_-$. Тому $d_i^N := p_i^N - r_i^N \to d_i^\infty = p_i^\infty$ для $i \in \mathbb{N}_+$ і $-d_i^N \to -d_i^\infty = r_i^\infty$ для $i \in \mathbb{N}_-$. Далі, неважко бачити, що наступні відношення не залежать від N:

$$\frac{d_i^N}{d_j^N} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_+ \cup \mathbb{N}_-.$$

Отже,

$$\frac{d_i^\infty}{d_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}.$$

Тому

$$\frac{p_i^\infty}{p_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_+, \qquad \frac{r_i^\infty}{r_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_-.$$

Тепер легко показати, що ця система рівнянь відносно граничних координат має єдиний розв'язок вигляду (10). У випадку $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ рівномірний розподіл граничних координат, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$, де $m = |\{i : p_i = r_i \ne 0\}|$, встановлено в [2].

З теореми 3 одержуємо наступний результат.

Теорема 4. *Елементи стохастичних матриць* P^∞, R^∞, *з якими асоційовані граничні міри* μ^∞, ν^∞, *мають явний опис*: *якщо* $\mathbf{p}_k \ne \mathbf{r}_k$, *то*

$$p_{ik}^\infty = \begin{cases} \dfrac{d_{ik}}{D_k}, & i \in \mathbb{N}_{+,k}, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{+,k}, \end{cases} \qquad r_{ik}^\infty = \begin{cases} -\dfrac{d_{ik}}{D_k}, & i \in \mathbb{N}_{-,k}, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{-,k}, \end{cases} \qquad \mathbf{p}_k \ne \mathbf{r}_k, \tag{11}$$

якщо ж $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$, *то*

$$p_{ik}^{\infty} = r_{ik}^{\infty} = \frac{1}{m_k}, \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k, \quad (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1, \tag{12}$$

де m_k — *кількість точок множини* $\{i : p_{ik} = r_{ik} \neq 0\}$.

Отже, значення міри μ^{∞} на інтервалі $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ у припущенні, що вона не є чисто точковою, визначається комбінацією відповідних добутків з формул (11), (12). Зокрема, якщо $\mathbf{p}_s \neq \mathbf{r}_s$ або $\mathbf{p}_s = \mathbf{r}_s$ для всіх $s \le k$, то

$$\mu^{\infty}(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = \begin{cases} \prod\limits_{l=1}^{k} \dfrac{d_{i_l l}}{D_l}, & i_l \in \mathbb{N}_{+,l}, \\ 0, & i_l \notin \mathbb{N}_{+,l}, \end{cases} \tag{13}$$

$$\mu^{\infty}(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{m_k}. \tag{14}$$

Безпосередньо з теорем 1 та 4 випливає наступний результат, який формулюємо лише для однієї з граничних мір.

Теорема 5. *Гранична міра* μ^{∞} *має чистий спектральний тип*:

a) $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ *лише тоді, коли*

$$P_{\max}(\mu^{\infty}) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \frac{d_{ik}}{D_k} > 0; \tag{15}$$

b) $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ *лише тоді, коли майже для всіх* k

$$\rho(\mu^{\infty}, \lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} \sum_i \sqrt{\frac{d_{ik} q_{ik}}{D_k}} > 0; \tag{16}$$

c) $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$ *лише тоді, коли умови* (15), (16) *порушуються.*

4. Відновлення спектрального типу. В цьому пункті знайдено умови відновлення спектрального типу та переходу в інший спектральний тип для однієї з граничних мір у динамічних системах конфлікту. Зазначимо, що питання про перехід мір з одного з класів $\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$ до іншого є важливим у застосуваннях.

Говоримо, що міра μ *має локальну перевагу* відносно ν (позначаємо $(\mu > > \nu)_{\mathrm{loc}}$), якщо для кожного k існує залежне від k значення індексу i (позначаємо його i'_k) таке, що різниці $d_{ik} = p_{ik} - r_{ik}$ з $i \in \mathbb{N}_{+,k}$, $i \neq i'_k$, прямують до нуля при $k \to \infty$ настільки швидко, що сума

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \neq i'_k, i \in \mathbb{N}_{+,k}} \frac{d_{ik}}{D_k} < \infty \tag{17}$$

є скінченною. Наприклад, якщо майже при всіх k (тобто $k \notin K$, де K — скінченна множина) числа d_{ik} строго додатні лише для одного значення індексу $i = i'_k$, то в (17) залишається скінченна кількість доданків і тому $(\mu > \nu)_{\mathrm{loc}}$.

Основним результатом роботи є наступна теорема. Вона стверджує, що в результаті конфліктної взаємодії між мірами $\mu \neq \nu$ гранична міра μ^{∞} буде чисто точковою лише тоді, коли початкова міра μ має локальну перевагу над мірою ν.

Теорема 6. *Нехай динамічна система конфлікту* (8) *має початкову пару мір* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ *таких, що* $\mu \neq \nu$. *Припустимо, що стохастичні матриці* P, R, *асоційовані з мірами* μ, ν, *задовольняють умову*: $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$ *майже для всіх* k (*за винятком* $k \in K$, *де* K — *скінченна множина*). *Тоді гранична міра*

$$\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}} \Leftrightarrow (\mu > \nu)_{\mathrm{loc}}. \tag{18}$$

Доведення ґрунтується на співвідношенні

$$(\mu > \nu)_{\mathrm{loc}} \Leftrightarrow \prod_{k \neq K} \max_i \frac{d_{ik}}{D_k} > 0. \tag{19}$$

Переконаємося в його справедливості. Дійсно, з (17) випливає права частина (19), оскільки

$$\sum_{i \in \{\mathbb{N}_{+,k} \setminus i'_k\}} \frac{d_{ik}}{D_k} = 1 - \max_i \frac{d_{ik}}{D_k}.$$

У свою чергу справедливість правої частини (19) означає, що з необхідністю всі додатні різниці d_{ik}, $i \neq i'_k$, збігаються до нуля так швидко, що виконується (17). Отже, припустимо, що міра μ має локальну перевагу над мірою ν. Тоді жодна з мір μ^∞, ν^∞ не може бути абсолютно неперервною, оскільки з нерівності $\mathbf{p}_k \neq$ $\neq \mathbf{r}_k$ для нескінченної кількості значень k випливає існування нескінченної кількості матричних елементів p_{ik}^∞, r_{ik}^∞, рівних нулю. На підставі умови (4) це означає, що $\mu^\infty, \nu^\infty \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$. Отже, міри $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}} \bigcup \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$. Далі, враховуючи те, що з мірою μ^∞ асоційована стохастична матриця P^∞, стовпчиками якої є координати векторів $\mathbf{p}_k^\infty$ (явний опис цих координат дає формула (11)), одержуємо

$$p_{k,\max}^\infty := \max_i p_{ik}^\infty = \max_i \frac{d_{ik}}{D_k}.$$

Таким чином, завдяки (19) робимо висновок, що добуток $\prod_{k=1}^\infty \max_i \frac{d_{ik}}{D_k}$ є строго додатним, або, що еквівалентно, $\prod_{k=1}^\infty p_{k,\max}^\infty > 0$. Тому згідно з теоремами 1 та 5 $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$. В один бік теорему доведено.

Навпаки, якщо міра μ^∞ є чисто точковою, то згідно з теоремою 5 виконується співвідношення $\prod_k^\infty p_{k,\max}^\infty > 0$. Воно, як тільки що було показано, є еквівалентним правій частині (19). Отже, якщо міра $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, то з необхідністю міра μ має локальну перевагу над мірою ν.

Теорему доведено.

Зазначимо, що у випадку, коли жодна з мір μ, ν не має локальної переваги над іншою, обидві граничні міри будуть чисто сингулярно неперервними: μ^∞, $\nu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$. Це випливає з подальшого аналізу спектральної структури граничних мір. Взагалі, в динамічних системах конфлікту найлегше втратити і найважче відновити (регенерувати) абсолютно неперервний тип спектра. Дійсно, нехай $\mu \in M_{\mathrm{ac}}$. Тоді $\mu^\infty := \mu \overset{\infty}{\divideontimes} \nu \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, якщо $\mu \neq \nu$, у тому сенсі, що і в теоремі 6. Дійсно, внаслідок (11) $p_{ik}^\infty = 0$ з деякими i для нескінченної кількості значень індексу k. Єдина можливість залишити міру μ абсолютно неперервною після конфліктної взаємодії полягає в тому, що ν має бути майже тотожною до μ, а матричні елементи Q практично не повинні відрізнятися від $1/n$. Сформулюємо цей результат у вигляді твердження.

Пишемо $q_{ik} \sim 1/n$, якщо $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{q_{ik}/n} \right) > 0$.

Твердження 1. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$. *Тоді* $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ *лише якщо* $q_{ik} \sim 1/n$ *та* $p_{ik} = r_{ik}$ *майже для всіх* k.

Доведення. З останньої умови згідно з теоремою 3 випливає, що $p_{ik}^{\infty} = r_{ik}^{\infty} = 1/n$ майже для всіх k. Тому на підставі першої умови твердження маємо $\rho(\mu^{\infty}, \lambda) > 0$. Це забезпечує $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$. Переконаємось у необхідності умов твердження. Вже було показано, що $\mu^{\infty} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, якщо $\mu \neq \nu$, в тому сенсі, що $p_{ik} \neq r_{ik}$ для нескінченної кількості значень k. Отже, умова $p_{ik} = r_{ik}$ майже для всіх k є необхідною. Тепер очевидно, що оскільки $p_{ik}^{\infty} = 1/n$, величина $\rho(\mu^{\infty}, \lambda)$ буде строго додатною лише за умови $q_{ik} \sim 1/n$.

Зауважимо, що для $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ при $q_{ik} \not\sim 1/n$ міра $\mu^{\infty} = \mu \overset{\infty}{※} \nu \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ навіть якщо $\mu \equiv \nu$. А при $\nu \neq \mu$ на нескінченній кількості інтервалів $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ граничну міру $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ ніколи не можна перевести в міру з абсолютно неперервним спектром з допомогою композиції конфлікту, тобто в цьому випадку $\mu^{\infty} \overset{\infty}{※} \nu' \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ для будь-якої міри ν'. Неможливість відновлення абсолютно неперервного спектра випливає з того, що в цьому випадку з необхідністю $p_{ik}^{\infty} = 0$ для нескінченної кількості значень k. Змінити такий розподіл за рахунок конфліктної взаємодії неможливо.

Твердження 2. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, *а* $\nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$. *Тоді* $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$.

Доведення. Зрозуміло, що $\mu^{\infty} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ (див. доведення теореми 6). З умови $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ випливає, що $p_{ik} \sim q_{ik}$ в тому сенсі, що $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1} \sqrt{p_{ik} q_{ik}} \right) > 0$. Але згідно з (4) усі $q_{ik} \geq q_{\inf} > 0$. Тому для майже всіх k виконується нерівність $r_{ik} < p_{ik}$ для всіх значень індексу i, за винятком одного, оскільки завдяки $\nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ числа $\max_i(r_{ik}) =: r_{i_k'' k}$ (індекс i_k'' відповідає мірі ν) повинні дуже швидко прямувати до одиниці при $k \to \infty$ (див. теорему 1 та доведення теореми 6). Це приводить до того, що майже для всіх k координати p_{ik}^{∞}, $i \neq i_k''$, є строго додатними. Більш того, ці координати не можуть збігатися до одиниці при $k \to \to \infty$, бо всі $r_{ik} \to 0$, $i \neq i_k''$. Тому $\mu^{\infty} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, а отже, внаслідок чистоти типу спектра структурно подібних мір $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$.

Властивість $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ є досить стійкою відносно взаємодії конфлікту. Пишемо $p_{ik} \sim (0 \vee 1)$ або $p_{ik} \sim [0 \vee 1]$, якщо відповідно $\prod_{k=1}^{\infty} p_{i'k} > 0$ або $p_{i'k} = 1$ майже для всіх k, де $p_{i'k} := \max_i\{p_{ik}\}$. Зрозуміло, що для кожної міри μ з чисто точковим спектром завжди виконується одне із співвідношень: $p_{ik} \sim (0 \vee 1)$ або $p_{ik} \sim [0 \vee 1]$. Якщо виконується останнє, то $p_{ik} = 0$, $i \neq i'$, майже для всіх k, і тоді $\mu \overset{\infty}{※} \nu \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, якою б не була міра ν. Якщо виконується перше співвідношення і при цьому $p_{ik} \neq 0$, $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$ майже для всіх k, то тоді з необхідністю існують координати $p_{ik}^{\infty} = 0$ для нескінченної кількості значень k, і тому знову $\mu^{\infty} \notin \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ незалежно від вибору Q-зображення.

Твердження 3. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, *а* $\nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$. *Тоді* $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ *при умові,* *що* $q_{ik} \sim 1/n$ *або* $p_{ik} \sim [0 \vee 1]$. *Якщо* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ *і* $i'_k \neq i''_k$ *майже для всіх* k, *то* $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$.

Доведення. Нагадаємо, що $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ еквівалентне співвідношенням

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{i'_k} > 0, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} r_{i''_k} > 0, \qquad p_{i'_k} := \max_i \{p_{ik}\}, \qquad r_{i''_k} := \max_i \{r_{ik}\}.$$

При умові $q_{ik} \sim 1/n$ або $p_{ik} \sim [0 \vee 1]$ міра μ з необхідністю матиме локальну перевагу над ν, якщо $\nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$. Тому перше твердження є очевидним. Далі, умова $i'_k \neq i''_k$ (див. (17)) для мір із чисто точковим спектром означає, що вони одночасно матимуть взаємну локальну перевагу одна над одною (звичайно, в різних позиціях). Тепер друге твердження є наслідком теореми 6.

5. Достатні умови. У цьому пункті одержано прості достатні умови належності граничних розподілів до чисто точкового, сингулярно неперервного або абсолютно неперервного типу спектра.

Теорема 7. *Гранична міра* μ^∞ *належить* $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, *якщо виконується одна з умов*: *майже для всіх* k

$$\left| \{ i : \operatorname{sign}(d_{ik}) = + \} \right| = 1, \tag{20}$$

де $d_{ik} := p_{ik} - r_{ik}$, а $|\{\cdot\}|$ — *кількість елементів множини* $\{\cdot\}$, *або*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \max_i d_{ik}) < \infty. \tag{21}$$

Доведення. Умова (20) означає, що для кожного значення індексу $k = 1, 2, \ldots$, крім, можливо, їх скінченної кількості, нерівність $d_{ik} > 0$ виконується лише для одного i (свого для кожного k). Тому майже для всіх k $\max_i \{p_{ik}^\infty\} = 1$. Отже, $P_{\max}(\mu^\infty) = \prod_k \max_i \{p_{ik}^\infty\} > 0$ і згідно з теоремами 1 та 5 $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$.

Зрозуміло, що навіть при невиконанні умови (20) послідовність $\max_i \{p_{ik}^\infty\}$ може прямувати до 1 при $k \to \infty$ настільки швидко, що нерівність $P_{\max}(\mu^\infty) > 0$ буде все одно виконуватись. Це, зокрема, має місце при умові (21), яка еквівалентна нерівності $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i (d_{ik}) > 0$. Тоді $\prod_{k=1}^{\infty} d_k^\infty > 0$ також, оскільки $d_k \leq d_k^\infty$ (див. [12]). Тому $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}^\infty\} > 0$, бо $\max_i p_{ik}^\infty = d_k^\infty$.

В умовах теореми 7 із додатковим припущенням, що $\left| \{ i : \operatorname{sign}(d_{ik}) = \pm \} \right| = 2$ майже для всіх k, гранична міра ν^∞ також належить $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$. Це випливає з того, що згідно з таким додатковим припущенням конфліктна взаємодія відбувається лише по двох спірних позиціях. Тому $\max_i \{r_{ik}^\infty\} = 1$ майже для всіх k. Якщо $n = 3$ і $\left| \{ i : \operatorname{sign}(d_{ik}) = + \} \right| = 2$ майже для всіх k, то ν^∞ також належить $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, бо і в цьому випадку майже всі $r_{ik}^\infty = 1$.

Більш загально можна стверджувати таке: якщо відомо, що $\left| \{ i : \operatorname{sign}(d_{ik}) = + \} \right| = n - 1$, $n > 3$, то з необхідністю $\left| \{ i : \operatorname{sign}(-d_{ik}) = + \} \right| = 1$, і в такому разі ν^∞ належить $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ за теоремою 7. При цьому міра μ^∞ також може мати чисто точковий спектр, якщо, наприклад, одночасно виконується умова (21).

У загальному випадку, коли $\mu \neq \nu$ на нескінченній кількості відрізків

$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ і точно відомо, що $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$, з необхідністю $\nu^\infty \notin \mathcal{M}_{\text{ac}}$. Це випливає з того, що для відповідних k існує хоча б одне значення i (своє для кожного k) таке, що $r_{ik}^\infty = 0$ (при цьому $p_{ik}^\infty > 0$). Тому $\rho(\nu^\infty, \lambda) = 0$. Чи можна стверджувати, що тоді $\nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{ac}}$? Взагалі кажучи — ні, але в більшості випадків — так. Якісно це можна пояснити таким чином. Припустимо, що початкова міра ν належить $\mathcal{M}_{\text{ac}}$. Тоді внаслідок того, що $\rho(\nu, \lambda) > 0$, значення r_{ik}, q_{ik} асимптотично близькі між собою при $k \to \infty$. З іншого боку, для всіх i, крім тих, для яких $p_{ik}^\infty = 1$, ця асимптотична близькість істотно не змінюється при $N \to \infty$, бо для таких i значення координат p_{ik}^N дуже швидко прямують до нуля, щоб забезпечити належність міри μ^∞ до класу $\mathcal{M}_{\text{pp}}$. Отже, відповідні координати r_{ik} змінюються мало і тому міра ν, втрачаючи свою абсолютну неперервність, не може стати чисто точковою і, отже, буде сингулярно неперервною.

Твердження 4. *Якщо умови* (20) *та*

$$\left| \{ i : d_{ik} = 0 \} \right| = n \tag{22}$$

одночасно виконуються для нескінченної кількості значень індексу k, *то обидві граничні міри* μ^∞, ν^∞ *належать* $\mathcal{M}_{\text{sc}}$.

Доведення. За умовою $\inf_{i,k} q_{ik} > 0$ (див. (4)) з виконання (20) для нескінченної кількості значень k випливає, що $r_{ik}^\infty = 0$ для нескінченної кількості значень k і тому $\rho(\nu^\infty, \lambda) = 0$. В цьому випадку $p_{lk}^\infty = 0$ для всіх l, відмінних від попередніх i. Отже, $\nu^\infty, \mu^\infty \notin \mathcal{M}_{\text{ac}}$. У свою чергу, виконання умови (22) означає, що $\max_i\{p_{ik}^\infty\} = \max_i\{r_{ik}^\infty\} = 1/n$ для нескінченної кількості значень індексу k. Тому $P_{\max}(\mu^\infty) = P_{\max}(\nu^\infty) = 0$, а це означає, що $\mu^\infty, \nu^\infty \notin \mathcal{M}_{\text{pp}}$. З огляду на чистоту спектрального типу для мір із класу $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ робимо висновок, що обидві міри μ^∞, ν^∞ належать $\mathcal{M}_{\text{sc}}$.

Твердження 5. *Якщо майже для всіх* k $q_{ik} = 1/n$ *і*

$$\left| \{ i : d_{ik} = 0 \} \right| = 0, \tag{23}$$

то обидві граничні міри μ^∞, ν^∞ *належать* $\mathcal{M}_{\text{ac}}$.

Доведення. Умова (23) означає, що майже для кожного значення $k = 1, 2, \ldots$ рівність $q_{ik} = r_{ik} \neq 0$ виконується для всіх значень i. Тому $p_{ik}^\infty = r_{ik}^\infty = 1/n$ майже для всіх k. Отже, $\rho(\mu^\infty, \lambda), \rho(\nu^\infty, \lambda) > 0$ і тому міри μ^∞, ν^∞ належать $\mathcal{M}_{\text{ac}}$.

6. Приклад. Побудуємо приклад, в якому дві початкові сингулярно неперервні міри при конфліктній взаємодії переходять у граничні розподіли з чисто точковим спектром.

Розглянемо динамічну систему конфлікту з парою початкових мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\text{ac}}$, $\mu \neq \nu$, заданих послідовностями стохастичних векторів $\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$, $n > 3$, $k = 1, 2, \ldots$, які майже для всіх k задовольняють взаємні співвідношення між своїми координатами:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}_k & = & (p_{1k}, \ldots, p_{i-1,k}, p_{ik}, p_{i+1,k}, \ldots, p_{n-1,k}, p_{nk} = 0) \\ & & \quad\;\; \wedge \;\; \ldots \;\;\; \wedge \;\;\;\; \vee \;\;\;\; \wedge \;\;\; \ldots \;\;\;\; \wedge \\ \mathbf{r}_k & = & (r_{1k}, \ldots, r_{i-1,k}, r_{ik}, r_{i+1,k}, \ldots, r_{n-1,k}, r_{nk} = 0). \end{array}$$

Іншими словами, майже для всіх k лише одна координата p_{ik} більша за r_{ik}, а усі інші p_{lk}, $l \neq i$, менші за r_{lk} (або навіть можуть бути рівними). Звичайно, значення індексу i у цих співвідношеннях взагалі залежні від k. Крім того, як мінімум, одна з координат у цих векторів є нульовою. Вимагаємо також, щоб

$$\sup_k (p_{ik}) < 1, \qquad \min_{l \neq i} (r_{lk}) > 0 \qquad \min_{l \neq i} (r_{lk} - p_{lk}) \geq \varepsilon > 0 \tag{24}$$

майже для всіх k (тут значення індексу i ті самі, що і вище). Останні умови гарантують належність обох мір до класу $\mathcal{M}_{\text{sc}}$. З теореми 3 випливає, що граничні міри μ^∞, ν^∞ будуть відповідати векторам $\mathbf{p}_k^\infty$, $\mathbf{r}_k^\infty$ зі значеннями координат

$$\mathbf{p}_k^\infty = (0, \ldots, 0, p_{ik}^\infty, \ldots, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$\mathbf{r}_k^\infty = (r_{1k}^\infty \neq 0, \ldots, r_{i-1,k}^\infty \neq 0, 0, r_{i-1,k}^\infty \neq 0, \ldots, r_{n-1,k}^\infty \neq 0, 0).$$

Тепер очевидно, що $P_{\max}(\mu^\infty) > 0$, а $P_{\max}(\nu^\infty) = 0$, причому ця рівність випливає з останньої вимоги в (24). Тому згідно з теоремою 1 $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$, а $\nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}} \cup \cup \mathcal{M}_{\text{sc}}$. Неважко забезпечити належність ν^∞ також до класу $\mathcal{M}_{\text{pp}}$. Для цього достатньо зняти останню вимогу в (24) і замінити вище співвідношення $p_{lk} < r_{lk}$, $l \neq i$, на $p_{lk} = r_{lk}$ для всіх l, окрім одного: $p_{l'k} < r_{l'k}$. Тоді на границі при $N \to \to \infty$ одержуємо $r_{l'k}^\infty = 1$ майже при всіх k. Це приведе до того, що $P_{\max}(\nu^\infty) > > 0$. Отже, міра ν^∞ також стане чисто точковою.

Зауважимо, що початкова міра μ в цьому прикладі може бути граничною мірою іншої динамічної системи з початковою мірою класу $\mathcal{M}_{\text{pp}}$. Тому наведений приклад демонструє можливість відновлення точкового спектрального типу в динамічних системах конфлікту.

7. Інтерпретація. Відомо, що питання про фізичний сенс сингулярно неперервного спектра є відкритим. Характерне явище виникнення такого спектра в теорії конфліктів, яка часто моделює боротьбу біологічних видів, зумовлює актуальність цього питання. Наведемо деяку інтерпретацію сингулярно неперервного спектра. Нагадаємо, що у практичних застосуваннях точковий спектр відповідає стаціонарним станам (частотам коливань) фізичних систем, абсолютно неперервний, як правило, пов'язаний з евклідовою структурою фізичного простору і досліджується в квантовій теорії в процесах розсіювання. Явище, коли в результаті конфліктної взаємодії між незнищенними опонентами зникає як точковий, так і абсолютно неперервний спектр, а натомість з'являється чисто сингулярно неперервний, нагадує фізичний процес анігіляції елементарних частинок в ядерних реакціях. За аналогією ми пропонуємо інтерпретувати виникнення сингулярно неперервного спектра як перехід системи з точкового або абсолютно неперервного спектра в стан, характерний для польової (можливо, духовної) субстанції. Зворотний процес трансформації сингулярно неперервного спектра в точковий можна інтерпретувати як математичний аналог дивних природних явищ, коли вплив якоїсь субстанції (не ідентифікованої в спостереженнях) приводить до явних еволюційних змін у поведінці біологічних систем. Ці зміни потребують наукового пояснення і становлять нетривіальні проблеми.

Зауважимо, що носії мір μ^∞, ν^∞, як правило, зосереджені на множинах фрактальної структури і мають нульову міру Лебега (див., наприклад, [16]). У фізичному розумінні носії таких мір мають щілини в будь-якому ε-околі кожної своєї точки (безмежно глибока мікропориста структура). Багато фізичних прикладів з подібними властивостями наведено в монографії [11]. Основний результат цієї роботи (теорема 6) дає критерій відновлення точкового (фізичного) спектра, виходячи з сингулярно неперервного. Для ілюстрації побудовано приклад динамічної системи конфлікту, яка переводить чисто сингулярно неперервний спектр у точковий.

1. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560.
2. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Meth. Operat. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
3. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 927 – 938.
4. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochact. Process. – 2004. – **3 – 4**. – P. 74 – 81.
5. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. – 2006. – **10**. – P. 39 – 49.
6. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1998. – 298 с.
7. *Крейн М. Г., Яврян В. А.* Функции спектрального сдвига, возникающие при возмущениях положительного оператора // J. Operator Theory. – 1981. – **6**. – P. 155 – 191.
8. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Springer, 2002. – 551 p.
9. *Jones A. J.* Game theory: mathematical models of conflict. – New York etc., 1980.
10. *Owen G.* Game theory. – San Diego, CA: Acad. Press, Inc., 1995. – 309 p.
11. *Barnslev M.* Fractals everywhere. – Acad. Press, 1988.– 540 p.
12. *Albeverio S., Bodnarchyk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 309 – 319.
13. *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Самойленко І. В.* Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 4. – С. 435 – 450.
14. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems. Cyclic migration. – Bonn, 2006. – 28 p. – (Preprint / Bonn Univ., № 262).
15. *Khan Md. Mahbubush Salam, Kazuyuki Ikko Takahashi.* Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent // J. Interdiscipl. Math. – 2006. – **9**, № 3. – P. 459 – 473.
16. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 101 – 119.
17. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions // arcXiv:math. – 2003. – PR/03 08 007 vl 1 Aug. – 12 p.
18. *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1948. – **49**. – P. 214 – 224.
19. *Chatterji S. D.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. – 1963. – **38**. – P. 325 – 331.
20. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.

Одержано 15.12.2006