УДК 512.64 : 519.61

**И. В. Сергиенко, Е. Ф. Галба, В. С. Дейнека**
(Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

# РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

The expansion of weighted pseudoinverse matrices with singular weights into matrix power products with negative exponents and arbitrary positive parameters is obtained. It is shown that a rate of convergence of such expansions depends on a parameter. On the basis of the proposed expansions, iteration methods with a quadratic rate of convergence are constructed and investigated. These methods can be used to calculate weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions. Iteration methods for the calculation of weighted normal pseudosolutions are adapted to solving least-square problems with constraints.

Одержано розвинення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами в матричні степеневі добутки з від'ємними показниками степенів та довільними додатними параметрами. Показано, що швидкість збіжності цих розвинень залежить від параметра. На основі запропонованих розвинень побудовано та досліджено ітераційні методи з квадратичною швидкістю збіжності для обчислення зважених псевдообернених матриць і зважених нормальних псевдорозв'язків. Ітераційні методи для обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків адаптовано для розв'язування задач найменших квадратів з обмеженнями.

**Введение.** Определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами впервые было введено в работе [1]. В этой же работе определены условия, при которых существует единственное решение системы матричных уравнений, с помощью которой определяется взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами. Приложения взвешенных псевдообратных матриц при решении различных задач указаны в работе [2]. На основании проведенных исследований в настоящей работе остановимся только на вопросе приложения взвешенных псевдообратных матриц для решения задач наименьших квадратов с ограничениями. К этим задачам приходят при математическом моделировании процессов в различных предметных областях: физике, экономике, обществе [3].

В работе [2] получены разложения взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами в матричные степенные произведения как с положительными, так и с отрицательными показателями степеней. В цитируемой работе указаны пути построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами. Разложения взвешенных псевдообратных матриц с отрицательными показателями степеней предлагались и исследовались без использования параметров для изменения скорости сходимости матричных степенных произведений. В настоящей работе для взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами предлагаются и исследуются их разложения в бесконечные матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней и произвольными положительными параметрами. Установлена зависимость скорости сходимости предложенных разложений от параметров. На основании полученных разложений построены и исследованы итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Показано, что итерационные процессы сходятся с квадратичной скоростью сходимости, знаменатель которой в значительной степени зависит от выбора параметра. Построенные итерационные процессы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами адаптированы для решения задач наименьших квадратов с ограничениями. Отметим, что некоторые из свойств разложений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, но без использования параметров для изменения скорости сходимости, исследованы в работе [4]. Эти результаты использованы в настоящей статье при исследовании свойств матричных степенных произведений с параметрами и сходимости итерационных процессов.

Статья состоит из пяти пунктов. В первом пункте приводятся и исследуются необходимые для дальнейшего изложения свойства симметризуемых и взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Во втором пункте строятся и исследуются разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в бесконечные матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней и произвольными положительными параметрами. Исследован вопрос влияния параметров на сходимость матричных степенных произведений. В третьем пункте на основе разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения предлагаются и исследуются итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, а в четвертом — для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Пятый пункт посвящен адаптации итерационных процессов вычисления взвешенных нормальных псевдорешений для решения задач наименьших квадратов с ограничениями.

**1. Определения, известные факты и вспомогательные утверждения.** Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения. Пусть $\mathbb{R}^{m\times n}$ — множество действительных матриц размера $m \times n$.

Приведем определение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами [1]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы $A$ определяется как матрица $X = A^{+}_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (XAC)^T = XAC. \tag{1.1}$$

Там же установлено, что система матричных уравнений (1.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения для рангов матриц:

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A), \quad \operatorname{rank}(AC) = \operatorname{rank}(A), \tag{1.2}$$

где $\operatorname{rank}(L)$ — ранг матрицы $L$.

Через $A^{+}_{EE}$ будем обозначать псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза [5, 6] к матрице $A$, которая определяется как единственная матрица, удовлетворяющая условиям (1.1) при $B = C = E$, где $E$ — единичная матрица.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ $n$-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы суть матрицы размера $n \times 1$. Пусть $H$ — симметричная положительно-определенная или же положительно-полуопределенная матрица. Через $\mathbb{R}^n(H)$ будем обозначать евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или же псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^T v$. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\| u \|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы $H$ через $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\overline{\mathbb{R}}^n(H^{+}_{EE}) \subset \mathbb{R}^n(H^{+}_{EE})$ будем обозначать подпространство векторов $u$, удовлетворяющих условию

$$H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u, \tag{1.3}$$

где обозначено $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^{+}$.

В дальнейшем для положительно-полуопределенных матриц $H$ будем использовать обозначение $H_{EE}^{+p} = (H^p)_{EE}^{+}$, где $p$ — целое или дробное число.

Множество векторов, удовлетворяющих условию (1.3), непусто. Действительно, так как $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ — проекционная матрица, множество (1.3) является образом этой матрицы. Поскольку нуль-пространства матриц $H$, $H_{EE}^{+}$ и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [7], полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^{+}}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^{+})$ становятся нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^{+})$.

Определим норму прямоугольной матрицы [8]. Пусть $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка $m$, $V$ — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка $n$, $x$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий

$$\operatorname{rank}(HA) = \operatorname{rank}(A), \qquad \operatorname{rank}(AV) = \operatorname{rank}(A). \tag{1.4}$$

Если $H$ и $V$ — положительно-определенные матрицы, то условия (1.4) заведомо выполняются.

Для множества матриц $A$, удовлетворяющих (1.4), норму введем соотношением

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|H^{1/2} A V x\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{1.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

При таком определении норма матрицы $A$

$$\|A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{1.6}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы $L$.

В [8] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (1.5), при выполнении условий (1.4) является аддитивной матричной нормой. Если условия (или одно из условий) (1.4) не выполняются, то формула (1.5) определяет полунорму матрицы $A$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $H$ и $V$ — матрицы, определенные выше, $M$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица порядка $p$, удовлетворяющая одному из условий

$$AMM_{EE}^{+} = AM_{EE}^{+}M = A, \qquad MM_{EE}^{+}B = M_{EE}^{+}MB = B. \tag{1.7}$$

Тогда (см. [8, 9])

$$\|AB\|_{HV} \leq \|A\|_{HM} \|B\|_{M_{EE}^{+2}V}. \tag{1.8}$$

Теперь определим матричную норму для квадратной матрицы [10]. Пусть $A \neq 0$ — произвольная квадратная матрица порядка $n$, а $H$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица того же порядка, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{rank}(HA) = \operatorname{rank}(A), \qquad \operatorname{rank}(AH) = \operatorname{rank}(A). \tag{1.9}$$

Норму матрицы $A$ определим соотношением

$$\|A\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| H^{1/2} A H_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x \right\|_E}{\left\| H^{1/2} x \right\|_E}, \tag{1.10}$$

где $x$ — произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$.

При таком определении норма матрицы $A$

$$\|A\|_H = [\lambda_{\max}(H_{EE}^{+1/2} A^T H A H_{EE}^{+1/2})]^{1/2}. \tag{1.11}$$

Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы одного порядка, причем для матрицы $B$ выполняется условие $H_{EE}^{+1/2} H^{1/2} B = B$, где $H$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица того же порядка, что и матрицы $A$ и $B$. Тогда [9, 10]

$$\|AB\|_H \leq \|A\|_H \|B\|_H, \tag{1.12}$$

т. е. функция $\|\cdot\|_H$, определенная формулой (1.10), при выполнении этого условия является мультипликативной матричной нормой.

Из (1.10) следует

$$\|Ax\|_H \leq \|A\|_H \|x\|_H, \qquad x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H), \tag{1.13}$$

т. е. введенная соотношением (1.10) матричная норма согласована с векторной нормой.

***Замечание* 1.1.** Из (1.6) и (1.11) следует, что введенная соотношением (1.10) матричная норма для квадратных матриц, удовлетворяющих условиям (1.9), является частным случаем матричной нормы, введенной для прямоугольных матриц, которые удовлетворяют условиям (1.4), формулой (1.5), если в последней положить, что $A$ является квадратной матрицей, $V = H_{EE}^{+1/2}$ и $x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H)$. Поэтому для нормы $\|A\|_H$, введенной соотношением (1.10), можно пользоваться обозначением $\|A\|_{HH_{EE}^{+1/2}}$.

Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [10].

**Определение 1.1.** *Квадратную матрицу $U$ будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц $M$ и $N$, если выполняются соответственно условия*

$$MU = U^T M, \qquad \operatorname{rank}(MU) = \operatorname{rank}(U), \tag{1.14}$$

$$UN = NU^T, \qquad \operatorname{rank}(UN) = \operatorname{rank}(U). \tag{1.15}$$

Используя условия (1.2), можно показать, что

$$\operatorname{rank}(BAX) = \operatorname{rank}(AX), \qquad \operatorname{rank}(XAC) = \operatorname{rank}(XA).$$

Тогда третье условие в (1.1) вместе с первым условием в (1.2) и четвертое условие в (1.1) вместе со вторым условием в (1.2) будут соответственно означать, что матрица $AX$ симметризуема слева симметризатором $B$, а матрица $XA$ симметризуема справа симметризатором $C$.

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства (см., например, [11 – 14]). Краткая характеристика этих работ приведена в статье [9].

***Замечание* 1.2.** В настоящей работе будем пользоваться определением 1.1 для симметризуемых матриц с вырожденными симметризаторами. Но для некоторых утверждений нет необходимости в выполнении вторых условий в (1.14), (1.15) (условий на ранги матриц). Эти случаи будут отмечены в статье.

В работе [8] изучались свойства матрицы-произведения симметризуемой справа матрицы вырожденным симметризатором на произвольную прямоугольную матрицу, а в работе [9] — свойства матрицы-произведения произвольной прямоугольной матрицы на симметризуемую слева матрицу вырожденным симметризатором. Результаты этих исследований будут использованы при установлении скорости сходимости итерационных процессов. Сформулируем их в виде лемм.

**Лемма 1.1.** *Пусть матрица* $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *удовлетворяет условию*

$$C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}Y = Y, \tag{1.16}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— матрица, удовлетворяющая условиям*

$$C^{1/2}C_{EE}^{+1/2}L = L, \tag{1.17}$$

$$LC = CL^T, \quad \operatorname{rank}(LC) = \operatorname{rank}(L), \tag{1.18}$$

$LY$ *— матрица, удовлетворяющая первому условию в* (1.4) *с* $H = C_{EE}^{+}$, *где* $C$ *— симметричная положительно-полуопределенная матрица порядка* $n$, $V$ *— симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка* $m$, *удовлетворяющая второму условию в* (1.4) *для матрицы* $LY$.

*Тогда для матрицы* $LY \neq 0$ *имеет место соотношение*

$$\|LY\|_{C_{EE}^{+}V} \leq \|L\|_{C_{EE}^{+}C^{1/2}}\|Y\|_{C_{EE}^{+}V} = \rho(L)\|Y\|_{C_{EE}^{+}V}, \tag{1.19}$$

*где* $\rho(L)$ *— спектральный радиус матрицы* $L$.

**Лемма 1.2.** *Пусть матрица* $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *удовлетворяет условию*

$$YB^{1/2}B_{EE}^{+1/2} = Y, \tag{1.20}$$

$L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *— матрица, удовлетворяющая условиям*

$$LB_{EE}^{+1/2}B^{1/2} = L, \tag{1.21}$$

$$BL = L^TB, \quad \operatorname{rank}(BL) = \operatorname{rank}(L), \tag{1.22}$$

$YL$ *— матрица, удовлетворяющая второму условию в* (1.4) *с* $V = B_{EE}^{+1/2}$, *где* $B$ *— симметричная положительно-полуопределенная матрица порядка* $m$, $H$ *— произвольная симметричная положительно-определенная или же положительно-полуопределенная матрица порядка* $n$, *удовлетворяющая первому условию в* (1.4) *для матрицы* $YL$.

*Тогда для матрицы* $YL$ *имеет место соотношение*

$$\|YL\|_{HB_{EE}^{+1/2}} \leq \|Y\|_{HB_{EE}^{+1/2}}\|L\|_{BB_{EE}^{+1/2}} = \rho(L)\|Y\|_{HB_{EE}^{+1/2}}. \tag{1.23}$$

Согласно определению 1.1, равенства (1.18) означают, что матрица $L$ симметризуема справа симметризатором $C$, а равенства (1.22) — что матрица $L$ симметризуема слева симметризатором $B$.

Для получения формул разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения будем использовать представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, полученное в работе [15], где показано, что матрица $A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.2), представима в виде

$$A_{BC}^{+} = CSA^TB, \tag{1.24}$$

где $S = f(A^TBAC)$ — многочлен от матрицы $A^TBAC$.

В этой работе также показано, что имеют место равенства

$$SA^T BACA^T = A^T BACSA^T = A^T, \tag{1.25}$$

а в работе [8] — справедливость равенств

$$A^T BAA^+_{BC} = A^T B, \qquad A^+_{BC} ACA^T B = CA^T B. \tag{1.26}$$

При доказательстве сходимости итерационных процессов будут использованы свойства симметризуемых матриц, которые устанавливают следующие леммы, доказанные в работе [4].

**Лемма 1.3.** *Пусть для квадратных невырожденных матриц* $A$ *и* $B$ *выполняются равенства*

$$CA = A^T C, \qquad BC = CB^T, \tag{1.27}$$

*где* $C$ — *симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица. Тогда эти же равенства выполняются для матриц* $A^{-1}$ *и* $B^{-1}$ *соответственно.*

**Лемма 1.4.** *Пусть* $A$ *и* $B$ — *симметризуемые слева* (*справа*) *матрицы одним и тем же вырожденным симметризатором. Для того чтобы матрица* $AB$ *или* $BA$ *была симметризуема слева* (*справа*) *тем же симметризатором, необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $A$ *и* $B$ *были перестановочны.*

***Следствие*** **1.1.** *Из доказательства леммы* 1.4 (*см.* [4]) *следует, что если симметризуемые слева* (*справа*) *одним и тем же симметризатором матрицы* $A$ *и* $B$ *коммутируют, то для того чтобы матрица* $AB$ *или* $BA$ *была симметризуема слева* (*справа*) *тем же симметризатором* (*в смысле определения* 1.1), *достаточно выполнения условия на ранг только для одной из матриц* $A$ *или* $B$.

***Следствие*** **1.2.** *Из доказательства леммы* 1.4 (*см.* [4]) *следует, что если матрицы* $A$ *и* $B$ *симметризуемы слева* (*справа*) *одним и тем же симметризатором без выполнения условий на ранги матриц* (*вторых условий в* (1.14), (1.15)), *то для того чтобы матрица* $AB$ *или* $BA$ *была симметризуема слева* (*справа*) *тем же симметризатором без выполнения условий на ранги этих матриц* (*вторых условий в* (1.1.4), (1.15)), *необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $A$ *и* $B$ *были перестановочны.*

**Лемма 1.5.** *Для симметризуемой слева матрицы симметричной положительно-полуопределенной матрицей* $B$ *при выполнении условия*

$$LB^{+1/2}_{EE} B^{1/2} = L \tag{1.28}$$

*имеет место равенство*

$$\left\| L^n \right\|_B \equiv \left\| L^n \right\|_{BB^{+1/2}_{EE}} = \left\| L \right\|^n_B \equiv \left\| L \right\|^n_{BB^{+1/2}_{EE}} = [\rho(L)]^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.29}$$

*а для симметризуемой справа матрицы* $L$ *симметричной положительно-полуопределенной матрицей* $C$ *при выполнении условия*

$$C^{1/2} C^{+1/2}_{EE} L = L \tag{1.30}$$

*имеет место равенство*

$$\left\| L^n \right\|_{C^+_{EE}} \equiv \left\| L^n \right\|_{C^+_{EE} C^{1/2}} = \left\| L \right\|^n_{C^+_{EE}} \equiv \left\| L \right\|^n_{C^+_{EE} C^{1/2}} = [\rho(L)]^n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.31}$$

При исследовании итерационных процессов будут использованы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды с отрицательными показателями степеней и произвольными положительными параметрами, которые устанавливает следующая лемма.

**Лемма 1.6.** *Для произвольной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *симметричных положительно-полуопределенных матриц* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *удовлетворяющих* *условиям* (1.2), *и для действительного числа* $0 < \alpha < \infty$ *имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды*:

$$A^+_{BC} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B, \tag{1.32}$$

$$A^+_{BC} = \alpha CA^T B \sum_{k=1}^{\infty} (E + \alpha ACA^T B)^{-k}. \tag{1.33}$$

Доказательство справедливости разложений (1.32), (1.33) аналогично доказательству этих разложений при $\alpha \equiv 1$ в работе [10].

При исследовании итерационных процессов потребуются следующие утверждения.

**Лемма 1.7.** *Ранги матриц* $AA^+_{BC}$ *и* $ACA^T B$ *совпадают.*

Лемма 1.7 легко устанавливается по аналогии с доказательством леммы 4 из [9] относительно равенства рангов матриц, связанных со взвешенной псевдоинверсией.

**Лемма 1.8.** *Матрицы* $AA^+_{BC}$ *и* $ACA^T B$ *коммутируют, имеют полную общую систему собственных векторов и общее нуль-пространство.*

***Доказательство.*** Матрица $AA^+_{BC}$ представима в виде многочлена [9]

$$AA^+_{BC} = f(ACA^T B) = -\alpha_k^{-1}[(ACA^T B)^k + \alpha_1 (ACA^T B)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} ACA^T B], \tag{1.34}$$

откуда и следует перестановочность матриц $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$.

Покажем, что матрицы $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$ имеют полную общую систему собственных векторов и их нуль-пространства совпадают. Поскольку согласно (1.34) матрица $AA^+_{BC}$ представима в виде многочлена от матрицы $ACA^T B$, она имеет те же собственные векторы, что и матрица $ACA^T B$ [16]. Так как матрица $AA^+_{BC}$ идемпотентна, она является матрицей простой структуры [17] и, следовательно, имеет $m$ линейно независимых собственных векторов. Тогда матрицы $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$ имеют общую полную систему собственных векторов.

В силу первого равенства из (1.26) имеем $ACA^T B = ACA^T BAA^+_{BC}$, откуда следует, что собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению матрицы $AA^+_{BC}$, будут собственными векторами, соответствующими нулевому собственному значению матрицы $ACA^T B$. В лемме 1.7 отмечено равенство рангов матриц $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$. Тогда, поскольку для любой матрицы $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ имеет место равенство $\dim(N(L)) = m - \operatorname{rank}(L)$ (см. [18]), матрицы $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$ имеют общее нуль-пространство.

Лемма 1.8 доказана.

Пусть

$$Ax = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^m, \tag{1.35}$$

— система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

**Определение 1.2.** *Вектор* $x^+$, *который является решением задачи*: *найти*

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n (C^+_{EE}) \cap \Omega} \| x \|_{C^+_{EE}}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B, \tag{1.36}$$

*где* $B$ *и* $C_{EE}^{+}$ — *симметричные положительно-полуопределенные матрицы, будем называть взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами системы* (1.35).

Таким образом, взвешенное нормальное псевдорешение с вырожденными весами системы линейных алгебраических уравнений есть решение по методу взвешенных наименьших квадратов с минимальной взвешенной нормой при вырожденных весах. При этом это решение принадлежит пересечению множества решений по методу взвешенных наименьших квадратов с вырожденными весами и подпространства $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^{+})$, т. е. множеств векторов, удовлетворяющих условию (1.3) с $H = C$, где $C$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица. Как указывалось выше, в этом подпространстве $\|\cdot\|_{C_{EE}^{+}}$ будет определять норму (а не полунорму).

***Замечание* 1.3.** В [10] показано, что задача (1.36) имеет единственное решение, которое определяется взвешенной псевдообратной матрицей с вырожденными весами, определенной условиями (1.1), (1.2), и правой частью системы (1.35) согласно формуле $x^{+} = A_{BC}^{+} f$.

**2. Разложения в произведения взвешенных псевдообратных матриц.** Рассмотрим разложения в бесконечные матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами.

**Теорема 2.1.** *Для произвольной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно-полуопределенных матриц* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *удовлетворяющих условиям* (1.2), *и действительного числа* $0 < \alpha < \infty$ *имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения*:

$$A_{BC}^{+} = \alpha C^{1/2}(E + \alpha C^{1/2} A^T B A C^{1/2})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha C^{1/2} A^T B A C^{1/2})^{-(2^k)}\} C^{1/2} A^T B, \tag{2.1}$$

$$A_{BC}^{+} = \alpha (E + \alpha C A^T B A)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha C A^T B A)^{-(2^k)}\} C A^T B, \tag{2.2}$$

$$A_{BC}^{+} = \alpha C (E + \alpha A^T B A C)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha A^T B A C)^{-(2^k)}\} A^T B, \tag{2.3}$$

$$A_{BC}^{+} = \alpha C A^T B^{1/2}(E + \alpha B^{1/2} A C A^T B^{1/2})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha B^{1/2} A C A^T B^{1/2})^{-(2^k)}\} B^{1/2}, \tag{2.4}$$

$$A_{BC}^{+} = \alpha C A^T B (E + \alpha A C A^T B)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha A C A^T B)^{-(2^k)}\}, \tag{2.5}$$

$$A_{BC}^{+} = \alpha C A^T (E + \alpha B A C A^T)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha B A C A^T)^{-(2^k)}\} B, \tag{2.6}$$

*причем*

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{BC,j}^{+} \right\|_{C_{EE}^{+} E_m} \le [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*}(C^{1/2} A^T B A C^{1/2})]^{-(2^j)} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{C_{EE}^{+} E_m}, \tag{2.7}$$

*где*

$$A^+_{BC,j} = \alpha C^{1/2}(E + \alpha C^{1/2}A^T BAC^{1/2})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{j-1}\{E + (E + \alpha C^{1/2}A^T BAC^{1/2})^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^T B, \quad j = 1, 2, \ldots ,$$

$\lambda^*_{\min}(L)$ — *минимальное отличное от нуля собственное значение матрицы* $L$.

***Доказательство.*** Сначала докажем соотношение (2.1). Обозначим $L = C^{1/2}A^T BAC^{1/2}$, $\lambda_i$, $i = 1, \ldots , n$, — собственные значения матрицы $L$ и $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. Матрица $L$ — симметричная и положительно-полуопределенная, так что ее собственные значения действительные и неотрицательные. Тогда матрица $E + \alpha L$ при $\alpha > 0$ невырождена. Следовательно, матрица $(E + \alpha L)^{-(2^k)}$ существует. Матрицы $L$, $E + \alpha L$, $(E + \alpha L)^{-(2^k)}$ симметричные и имеют общую систему собственных векторов. Следовательно, для них имеет место спектральное разложение с одной и той же ортогональной матрицей $Q$. Рассмотрим один из сомножителей матричного степенного произведения (2.1). Учитывая изложенное выше и равенства (1.25), получаем

$$\alpha C^{1/2}(E + \alpha L)^{-1}\{E + (E + \alpha L)^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^T B =$$
$$= \alpha C^{1/2}(E + \alpha L)^{-1}\{E + (E + \alpha L)^{-(2^k)}\}L^2C^{1/2}S^2A^T B =$$
$$= \alpha C^{1/2}Q(E + \alpha\Lambda)^{-1}Q^T\{E + Q(E + \alpha\Lambda)^{-(2^k)}Q^T\}Q\Lambda^2Q^T C^{1/2}S^2A^T B =$$
$$= \alpha C^{1/2}Q(E + \alpha\Lambda)^{-1}\{E + (E + \alpha\Lambda)^{-(2^k)}\}\Lambda^2Q^T C^{1/2}S^2A^T B =$$
$$= \alpha^{-1}C^{1/2}Q(E + \alpha\Lambda)^{-1}\{E + (E + \alpha\Lambda)^{-(2^k)}\}(\alpha\Lambda)^2Q^T C^{1/2}S^2A^T B. \qquad (2.8)$$

Для доказательства теоремы 2.1 используем тождество Эйлера для степенных числовых бесконечных произведений [19, 4]

$$x\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2^k}) = \frac{x}{1 - x}, \quad |x| < 1. \qquad (2.9)$$

В (2.9) положим $x = (1 + \alpha\lambda_i)^{-1}$. Поскольку для $\lambda_i > 0$ числа $(1 + \alpha\lambda_i)^{-1} < 1$, при использовании тождества (2.9) имеем

$$x\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2^k}) = (\alpha\lambda_i)^{-1}, \quad \lambda_i > 0. \qquad (2.10)$$

Так как

$$(E + \alpha\Lambda)^{-1}\{E + [(E + \alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k}\}(\alpha\Lambda)^2 =$$
$$= \operatorname{diag}\{(1 + \alpha\lambda_i)^{-1}[1 + ((1 + \alpha\lambda_i)^{-1})^{2^k}](\alpha\lambda_i)^2\}, \qquad (2.11)$$

то, учитывая (2.10), получаем

$$(E + \alpha\Lambda)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + [(E + \alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k}\}(\alpha\Lambda)^2 = \alpha\Lambda. \qquad (2.12)$$

Действительно, в силу (2.10) матричное степенное произведение $(E + \alpha\Lambda)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + [(E + \alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k}\}\alpha\Lambda$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными единице при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, откуда и следует (2.12).

На основании (2.8), (2.12), (1.24) и (1.25) имеем

$$\alpha C^{1/2}(E+\alpha L)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha L)^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^TB =$$

$$= C^{1/2}Q\Lambda Q^TC^{1/2}S^2A^TB = C^{1/2}LC^{1/2}S^2A^TB =$$

$$= CA^TBACS^2A^TB = CSA^TB = A^+_{BC},$$

т. е. приходим к равенству (2.1).

Теперь покажем справедливость оценки (2.7). Аналогично равенству (2.8) получаем

$$\alpha C^{1/2}(E+\alpha L)^{-1}\{E+(E+\alpha L)^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^TB =$$

$$= \alpha C^{1/2}Q(E+\alpha\Lambda)^{-1}\{E+(E+\alpha\Lambda)^{-(2^k)}\}\Lambda Q^TC^{1/2}SA^TB. \qquad (2.13)$$

Учитывая (2.10), (2.11), аналогично (2.12) имеем равенство

$$(E+\alpha\Lambda)^{-1}\prod_{k=0}^{\infty}\{E+[(E+\alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k}\}\alpha\Lambda = D, \qquad (2.14)$$

где $D$ — диагональная матрица с элементами, равными единице при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$.

Чтобы получить оценку (2.7), будем использовать тождество для произведения конечного числа сомножителей тождества (2.9), полученное в [20] (см. также [4]):

$$x\prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{2^k}) = \sum_{k=1}^{2^n}x^k, \quad |x| < 1. \qquad (2.15)$$

В (2.15) положим $x = (1+\alpha\lambda_i)^{-1}$. Тогда в силу (2.15) при $\lambda_i > 0$ имеем

$$x\prod_{k=0}^{j-1}(1+x^{2^k}) = (\alpha\lambda_i)^{-1} - [\alpha\lambda_i(1+\alpha\lambda_i)^{2^j}]^{-1}, \quad \lambda_i > 0. \qquad (2.16)$$

Учитывая (2.11), (2.16), получаем

$$(E+\alpha\Lambda)^{-1}\prod_{k=0}^{j-1}\{E+[(E+\alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k}\}\alpha\Lambda = D - D(E+\alpha\lambda)^{-(2^j)}. \qquad (2.17)$$

В силу (2.13), (2.14) и (2.17) имеем

$$A^+_{BC} - A^+_{BC,j} = C^{1/2}QD(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)}Q^TC^{1/2}SA^TB.$$

Учитывая (1.24), равенство $C^{1/2}C^{+1/2}_{EE}C^{1/2} = C^{1/2}$ и перестановочность матриц $C^{1/2}$ и $C^{+1/2}_{EE}$, последнее равенство записываем в виде

$$A^+_{BC} - A^+_{BC,j} = C^{1/2}QD(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)}Q^TC^{+1/2}_{EE}A^+_{BC}. \qquad (2.18)$$

Чтобы показать справедливость оценки (2.7), будем использовать формулу (1.8), которая имеет место при выполнении одного из условий (1.7), формулу (1.6), ортогональность матрицы $Q$ и то обстоятельство, что матрица $C^{+1/2}_{EE}C^{1/2}$ идемпотентна. Из (2.18) последовательно получаем

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{BC,j} \right\|_{C^+_{EE}E_m} \leq \left\| C^{1/2} \right\|_{C^+_{EE}E_n} \left\| QD(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)} Q^T C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} =$$

$$= \left\| QD(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)} Q^T C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} \leq$$

$$\leq \left\| Q \right\|_{E_nE_n} \left\| D(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)} Q^T C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} =$$

$$= \left\| D(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)} Q^T C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} \leq$$

$$\leq \left\| D(E+\alpha\Lambda)^{-(2^j)} \right\|_{E_nE_n} \left\| Q^T C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} =$$

$$= [1+\alpha\lambda^*_{\min}(L)]^{-(2^j)} \left\| Q^T \right\|_{E_nE_n} \left\| C^{+1/2}_{EE} A^+_{BC} \right\|_{E_nE_m} =$$

$$= [1+\alpha\lambda^*_{\min}(L)]^{-(2^j)} \left\| C^{+1/2}_{EE} \right\|_{E_nC^{1/2}} \left\| A^+_{BC} \right\|_{C^+_{EE}E_m} =$$

$$= [1+\alpha\lambda^*_{\min}(L)]^{-(2^j)} \left\| A^+_{BC} \right\|_{C^+_{EE}E_m},$$

т. е. приходим к оценке (2.7).

Для доказательства соотношений (2.2) – (2.6) будем использовать полученное выше разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами (2.1) и свойство псевдообращения по Муру – Пенроузу для произведения двух матриц. Известно (см., например, [7]), что для произведения двух прямоугольных произвольных матриц равенство

$$(MN)^+_{EE} = N^+_{EE} M^+_{EE} \tag{2.19}$$

в общем случае не является верным. В цитируемой монографии указаны необходимые и достаточные условия, чтобы это равенство имело место. Для этого должны выполняться соотношения

$$M^+_{EE} MNN^T M^T = NN^T M^T, \qquad NN^+_{EE} M^T MN = M^T MN. \tag{2.20}$$

На основании (2.20) с проверкой условий (2.19), равенства $C^{1/2} A^T B = LC^{+1/2}_{EE}$, которое имеет место в силу (1.25), (1.26), в [4] получено равенство

$$C^{1/2}(E+L)^{-k} C^{1/2} A^T B = (E + CA^T BA)^{-k} CA^T B, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично для данного случая будем иметь

$$C^{1/2}(E+\alpha L)^{-k} C^{1/2} A^T B = (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.21}$$

Тогда, используя (2.21), для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ получаем

$$C^{1/2}(E+\alpha L)^{-1}\{E + (E+\alpha L)^{-(2^k)}\} C^{1/2} A^T B =$$

$$= C^{1/2}(E+\alpha L)^{-1} C^{1/2} A^T B + C^{1/2}(E+\alpha L)^{-(2^k+1)} C^{1/2} A^T B =$$

$$= (E+\alpha CA^T BA)^{-1} CA^T B + (E+\alpha CA^T BA)^{-(2^k+1)} CA^T B =$$

$$= (E+\alpha CA^T BA)^{-1}\{E + (E+\alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B.$$

В силу последнего равенства из (2.1) получим (2.2).

По такой же схеме доказывается соотношение (2.3), для чего используются формулы (2.19), (2.20). Доказательство разложения взвешенной псевдообратной матрицы (2.4) проводится аналогично доказательству формулы (2.1), для чего используется спектральное разложение симметричной матрицы

$B^{1/2}ACA^TB^{1/2}$ и тождество (2.9). Доказательство разложений (2.5), (2.6) проводится аналогично доказательству разложений (2.2), (2.3).

Теорема 2.1 доказана.

В работе [4] получена формула (2.1) при $\alpha \equiv 1$. Из формулы (2.7) следует, что матричное степенное произведение при $\alpha > 1$ сходится быстрее, чем то же произведение при $\alpha = 1$ к взвешенной псевдообратной матрице с вырожденными весами, а при $\alpha < 1$ — медленнее. Эта информация является полезной при построении и реализации итерационных процессов на основе матричных степенных произведений для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Последнее будет показано при исследовании итерационных процессов в пунктах 3 и 4.

***Замечание* 2.1.** Пусть в формуле (2.7) $j = 1$, тогда она принимает вид

$$\left\| A_{BC}^{+} - \alpha C^{1/2} \sum_{k=1}^{2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-k} C^{1/2} A^T B \right\|_{C_{EE}^{+} E_m} \le$$

$$\le \ [1 + \alpha\lambda_{\min}^{*}(C^{1/2} A^T BAC^{1/2})]^{-2} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{C_{EE}^{+} E_m},$$

откуда следует, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha C^{1/2} \sum_{k=1}^{2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-k} C^{1/2} A^T B \ = \ A_{BC}^{+},$$

т. е. получаем предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами.

Теперь обоснуем матричные тождества, которые являются некоторыми матричными аналогами числового тождества (2.15). Они будут использованы в пунктах 3 и 4 при исследовании итерационных процессов.

**Лемма 2.1.** *Для произвольной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *симметричных положительно-полуопределенных матриц* $B$ *и* $C$ *таких, что* $CA^TBA$ *существует, и действительного числа* $0 < \alpha < \infty$ *имеет место тождество*

$$(E + \alpha CA^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B \ =$$

$$= \ \sum_{k=1}^{2^n} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B. \tag{2.22}$$

***Доказательство.*** Обозначим через $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, собственные значения матрицы $L = C^{1/2}A^TBAC^{1/2}$ и $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$. Поскольку $E + [(E + \alpha\Lambda)^{-1}]^{2^k} =$ $= \mathrm{diag}\{1 + [(1 + \alpha\lambda_i)^{-1}]^{2^k}\}$, число $\left|(1 + \lambda_i)^{-1}\right| < 1$ при $\lambda_i > 0$, а тождество (2.15) имеет место при $x = 1$ для любого $n < \infty$, в силу (2.15) имеем

$$(E + \alpha\Lambda)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha\Lambda)^{-(2^k)}\} \ = \ \sum_{k=1}^{2^n} (E + \alpha\Lambda)^{-k}. \tag{2.23}$$

Умножим правую и левую части равенства (2.23) слева на $C^{1/2}Q$, а справа на $Q^TC^{1/2}A^TB$, где $Q$ — ортогональная матрица в спектральном разложении матрицы $L$. В результате получим

$$C^{1/2}(E+\alpha L)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha L)^{-(2^k)}\}C^{1/2}A^TB =$$

$$= C^{1/2}\sum_{k=1}^{2^n}(E+\alpha L)^{-k}C^{1/2}A^TB. \tag{2.24}$$

В силу (2.21) из (2.24) следует (2.22), т. е. утверждение леммы 2.1.

**Лемма 2.2.** *Для произвольной матрицы* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричных положительно-полуопределенных матриц* $B$ *и* $C$ *таких, что* $ACA^TB$ *существует, и действительного числа* $0<\alpha<\infty$ *имеет место тождество*

$$CA^TB(E+\alpha ACA^TB)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha ACA^TB)^{-(2^k)}\} =$$

$$= CA^TB\sum_{k=1}^{2^n}(E+\alpha ACA^TB)^{-k}. \tag{2.25}$$

***Доказательство.*** По такой же схеме, как получено (2.21), имеем равенство

$$C^{1/2}(E+\alpha L)^{-k}C^{1/2}A^TB = CA^TB(E+\alpha ACA^TB)^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.26}$$

В силу (2.26) из (2.24) получим (2.25), т. е. утверждение леммы 2.2.

**3. Итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц.** Сначала для построения итерационного процесса будем использовать формулу (2.2). Поскольку матрица $(E+CA^TBA)^{-1}$ коммутирует с матрицами $E$ и $(E+CA^TBA)^{-i}$, $i=2,3,\ldots$, эту формулу можно переписать в виде

$$A^+_{BC} = \alpha\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha CA^TBA)^{-(2^k)}\}(E+\alpha CA^TBA)^{-1}CA^TB. \tag{3.1}$$

Положим

$$X_k = \alpha\prod_{i=0}^{k-1}\{E+(E+\alpha CA^TBA)^{-(2^i)}\}(E+\alpha CA^TBA)^{-1}CA^TB. \tag{3.2}$$

Тогда для вычисления $A^+_{BC}$ получим итерационный процесс

$$X_0 = \alpha(E+\alpha CA^TBA)^{-1}CA^TB, \quad X_k = \{E+(E+\alpha CA^TBA)^{-(2^{k-1})}\}X_{k-1} =$$

$$= X_{k-1}+(E+\alpha CA^TBA)^{-(2^{k-1})}X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.3}$$

**Теорема 3.1.** *Итерационный процесс* (3.3) *при* $0<\alpha<\infty$ *сходится, причем имеет место оценка*

$$\left\| A^+_{BC} - X_k \right\|_{C^+_{EE}V} \le q^{2^k}\left\| A^+_{BC}\right\|_{C^+_{EE}V}, \tag{3.4}$$

*где*

$$q = \rho[A^+_{BC}A(E+\alpha CA^TBA)^{-1}] = [1+\alpha\lambda^*_{\min}(CA^TBA)]^{-1} < 1, \tag{3.5}$$

*матрица* $C$ *входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно* (1.1), (1.2), $V\in\mathbb{R}^{m\times m}$ — *произвольная симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая второму условию в* (1.4) *для матрицы* $A^+_{BC}-X_k$.

***Доказательство.*** Сходимость последовательности матриц, определенной формулой (3.3), к взвешенной псевдообратной матрице при $k \to \infty$ следует из того факта, что эта последовательность построена на основе матричного степенного произведения (3.1). Покажем справедливость оценки (3.4).

Пусть $F = E + \alpha CA^T BA$. В силу тождества (2.22), которое перепишем в виде

$$\alpha \prod_{k=0}^{n-1} \{E + F^{-(2^k)}\} F^{-1} CA^T B = \alpha \sum_{k=1}^{2^n} F^{-k} CA^T B,$$

и формул (1.32), (3.2) имеем

$$A_{BC}^+ - X_k = \alpha \sum_{i=2^k+1}^{\infty} F^{-i} CA^T B = F^{-(2^k)} \left( \alpha \sum_{i=1}^{\infty} F^{-i} CA^T B \right) = F^{-(2^k)} A_{BC}^+. \quad (3.6)$$

В работе [10] показано, что матрицы $A_{BC}^+ A$ и $(E + CA^T BA)^{-1}$ коммутируют. Тогда и матрицы $A_{BC}^+ A$ и $(E + \alpha CA^T BA)^{-1}$ также перестановочны. Учитывая это обстоятельство и второе равенство в (1.1), равенство (3.6) перепишем в виде $A_{BC}^+ - X_k = A_{BC}^+ A F^{-(2^k)} A_{BC}^+$. Поскольку матрица $A_{BC}^+ A$ идемпотентна, последнее равенство можно представить в виде

$$A_{BC}^+ - X_k = [A_{BC}^+ A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}]^{2^k} A_{BC}^+. \quad (3.7)$$

Чтобы получить оценку (3.4), используем лемму 1.1, где положим $L = [A_{BC}^+ A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}]^{2^k}$, $Y = A_{BC}^+$. Условия, накладываемые на матрицы $Y$, $L$, $Z = LY$, при которых выполняется соотношение (1.19), проверяются по той же схеме, что и для одноименных матриц из теоремы 3 работы [4]. При этом используются формулы (1.24), (1.26), свойства псевдообратных матриц, вытекающие из их определения, неравенства для рангов матриц, свойства идемпотентной матрицы $A_{BC}^+ A$, лемма 1.3. Так же показывается, что для $Z \neq 0$ выполняется первая аксиома матричной нормы $\| \cdot \|_{C_{EE}^+ V}$ и равенство $\operatorname{rank}(C_{EE}^+ Z) = \operatorname{rank}(Z)$. Тогда для матрицы $LY$ имеет место соотношение (1.19), в силу которого из (3.7) получаем

$$\| A_{BC}^+ - X_k \|_{C_{EE}^+ V} \le \| [A_{BC}^+ A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}]^{2^k} \|_{C_{EE}^+ C^{1/2}} \| A_{BC}^+ \|_{C_{EE}^+ V}. \quad (3.8)$$

В работе [4] показано, что для матрицы $A_{BC}^+ A (E + CA^T BA)^{-1}$ выполняются условия, при которых имеет место равенство (1.31). Очевидно, что и для матрицы $A_{BC}^+ A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}$ выполняются эти условия. Тогда в силу (1.31) из (3.8) следует (3.4).

Осталось показать справедливость равенства (3.5). В работе [10] показано, что все ненулевые собственные значения симметризуемой справа матрицы $A_{BC}^+ A (E + CA^T BA)^{-1}$ равны $(1 + \lambda_i)^{-1}$, $i = 1, \ldots, r$, где $\lambda_i > 0$ — ненулевые собственные значения матрицы $CA^T BA$, $r$ — ранг этой матрицы. Следовательно, $\rho[A_{BC}^+ A (E + CA^T BA)^{-1}] = [1 + \lambda_{\min}^*(CA^T BA)]^{-1}$. Аналогично получим $\rho[A_{BC}^+ A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}] = [1 + \alpha \lambda_{\min}^*(CA^T BA)]^{-1}$, т. е. равенство (3.5).

Теорема 3.1 доказана.

Теперь для построения итерационного процесса будем использовать разложение (2.5) взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1.1), (1.2), в матричное степенное произведение. Положим

$$X_k = \alpha CA^T B(E + \alpha ACA^T B)^{-1} \prod_{i=0}^{k-1} \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^i)}\}. \tag{3.9}$$

Тогда для вычисления $A^+_{BC}$ получим итерационный процесс

$$X_0 = \alpha CA^T B(E + \alpha ACA^T B)^{-1}, \quad X_k = X_{k-1}\{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^{k-1})}\} =$$

$$= X_{k-1} + X_{k-1}(E + \alpha ACA^T B)^{-(2^{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.10}$$

**Теорема 3.2.** *Итерационный процесс* (3.10) *при* $0 < \alpha < \infty$ *сходится, причем имеет место оценка*

$$\left\| A^+_{BC} - X_k \right\|_{HB^{+1/2}_{EE}} \le q^{2^k} \left\| A^+_{BC} \right\|_{HB^{+1/2}_{EE}}, \tag{3.11}$$

*где*

$$q = \rho[AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}] = [1 + \alpha\lambda^*_{\min}(ACA^T B)]^{-1} < 1, \tag{3.12}$$

$H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— произвольная симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая первому условию в* (1.4) *для матрицы* $A^+_{BC} - X_k$, *матрица* $B$ *входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно третьему условию в* (1.1) *и первому условию в* (1.2).

***Доказательство*** этой теоремы проводится по той же схеме, что и теоремы 3.1. Пусть $F = E + \alpha ACA^T B$. В силу тождества (2.25) и формул (1.33), (3.9) имеем

$$A^+_{BC} - X_k = \alpha CA^T B \sum_{i=2^k+1}^{\infty} F^{-i} = \left(\alpha CA^T B \sum_{i=1}^{\infty} F^{-i}\right) F^{-(2^k)} = A^+_{BC} F^{-(2^k)}. \tag{3.13}$$

Учитывая второе условие в (1.1) и то обстоятельство, что матрица $AA^+_{BC}$ идемпотентна, равенство (3.13) перепишем в виде

$$A^+_{BC} - X_k = A^+_{BC}[AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]^{2^k}. \tag{3.14}$$

Чтобы получить оценку (3.11), используем лемму 1.2, где положим $L = [AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]^{2^k}$, $Y = A^+_{BC}$. Чтобы воспользоваться соотношением (1.23), необходимо проверить выполнение условий (1.20) – (1.22) и условия леммы на матрицу $YL$. Отметим только, что в отличие от матрицы $L$, определенной в теореме 3.1, матрица $L$, определенная в настоящей теореме, будет симметризуемой слева симметризатором $B$. Используя леммы 1.3 – 1.5, следствие 1.1, формулы (1.24), (1.26), нетрудно установить, что все условия леммы 1.2 выполнены. Тогда на основании (1.23) из (3.14) получаем

$$\left\| A^+_{BC} - X_k \right\|_{HB^{+1/2}_{EE}} \le \left\| A^+_{BC} \right\|_{HB^{+1/2}_{EE}} \left\| [AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]^{2^k} \right\|_{BB^{+1/2}_{EE}}. \tag{3.15}$$

Матрица $AA^+_{BC}$ симметризуема слева симметризатором $B$ в силу третьего условия из (1.1). На основании леммы 1.3 матрица $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$ также симметризуема слева симметризатором $B$. В лемме 1.8 показано, что матрицы $AA^+_{BC}$ и $ACA^T B$ коммутируют, откуда следует, что матрицы $AA^+_{BC}$ и $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$ также перестановочны. Тогда согласно следствию 1.2 матрица $L$ симметризуема слева симметризатором $B$ (без выполнения условий на ранги матриц), а в силу (1.24) для нее выполняется условие (1.28). Тогда на основании леммы 1.5 (формула (1.29)) и формулы (1.23) соотношение (3.15) принимает вид

$$\left\| A_{BC}^{+} - X_k \right\|_{HB_{EE}^{+1/2}} \leq \left(\rho[AA_{BC}^{+}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]^{2^k}\right) \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{HB_{EE}^{+1/2}}. \qquad (3.16)$$

Теперь осталось определить значение спектрального радиуса матрицы $L$. Пусть $\lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, — собственные значения матрицы $ACA^T B$. Тогда собственные значения матрицы $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$ при $\lambda_i > 0$ равны $(1 + \alpha\lambda_i)^{-1}$, $i = 1, \ldots, r$, где $r$ — ранг матрицы $ACA^T B$. Из леммы 2.1 следует, что нулевые собственные значения матрицы $L$ определяются как произведение нулевых собственных значений матрицы $AA_{BC}^{+}$ и собственных значений 1 матрицы $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$. Чтобы определить величины остальных собственных значений матрицы $L$, используем то обстоятельство, что собственные значения матрицы-произведения двух перестановочных матриц равны произведению их собственных значений, упорядоченных некоторым фиксированным образом [17]. Поскольку ненулевые собственные значения идемпотентной матрицы $AA_{BC}^{+}$ равны 1, а собственные значения матрицы $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$, отличные от единицы, равны $(1 + \alpha\lambda_i)^{-1}$, $i = 1, \ldots, r$, $\lambda_i > 0$, все ненулевые собственные значения матрицы $L$ равны $(1 + \alpha\lambda_i)^{-1}$, $i = 1, \ldots, r$, $\lambda_i > 0$. Тогда

$$\rho[AA_{BC}^{+}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}] = [1 + \alpha\lambda_{\min}^{*}(ACA^T B)]^{-1} < 1, \qquad (3.17)$$

т. е. приходим к равенству (3.12), что и завершает доказательство теоремы 3.2.

Из (3.5) и (3.12) следует, что значение $q$ зависит от параметра $\alpha$ и уменьшается с увеличением этого параметра. Следовательно, для ускорения сходимости итерационного процесса необходимо выбирать $\alpha$ достаточно большим. Но с увеличением параметра $\alpha$ будут расти обусловленности матриц $E + \alpha CA^T BA$ и $E + \alpha ACA^T B$, с которыми связана точность вычисления обратных к этим матрицам. Поэтому выбор параметра $\alpha$ имеет большое значение при построении и реализации итерационных процессов.

***Замечание* 3.1.** В теоремах 3.1 и 3.2 величины $q$ определяются соответственно формулами (3.5) и (3.12). Поскольку неотрицательные собственные значения матрицы-произведения при перестановке матриц-сомножителей не изменяются [16], значения $q$, определенные в теоремах 3.1 и 3.2, совпадают. В формуле (3.4) в качестве матрицы $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ можно использовать произвольную симметричную положительно-полуопределенную матрицу, удовлетворяющую второму условию в (1.4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_k$, а в формуле (3.11) в качестве $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ можно взять произвольную симметричную положительно-полуопределенную матрицу, удовлетворяющую первому условию в (1.4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_k$. Нетрудно убедиться, что в силу формул (1.24), (3.3) матрица $B_{EE}^{+1/2}$ удовлетворяет второму условию в (1.4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_k$, а матрица $C_{EE}^{+}$ в силу формул (1.24), (3.10) — первому условию в (1.4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_k$. Тогда если в (3.4) положить $V = B_{EE}^{+1/2}$, а в (3.11) — $H = C_{EE}^{+}$, то формулы (3.4), (3.11) будут идентичны.

**4. Итерационные методы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений.** Сначала для нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению $x^{+}$ системы (1.35) построим итерационный процесс на основе формулы (2.2). Положим $x_k = X_k f$, где матрицы $X_k$ определены формулами (3.2), (3.3). Тогда для вычисления приближения к $x^+$ получим итерационный процесс

$$x_0 = \alpha(E + \alpha CA^T BA)^{-1} CA^T Bf, \quad x_k = \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^{k-1})}\} x_{k-1} =$$

$$= x_{k-1} + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{4.1}$$

**Теорема 4.1.** *Итерационный процесс* (4.1) *сходится в* $\overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$, *причем имеет место оценка*

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le q^{2^k} \| x^+ \|_{C_{EE}^+}, \tag{4.2}$$

*где* $q$ *и матрица* $C$ *определены в теореме* 3.1.

***Доказательство.*** Учитывая равенства $x^+ = A_{BC}^+ f$, $x_k = X_k f$ и (3.7), получаем

$$z = x^+ - x_k = (A_{BC}^+ - X_k) f = Lx^+, \tag{4.3}$$

где $L = [A_{BC}^+ A(E + \alpha CA^T BA)^{-1}]^{2^k}$.

Чтобы воспользоваться соотношением (1.13) для оценки $Lx^+$ в норме $\| \cdot \|_{C_{EE}^+}$, необходимо показать, что для матрицы $L$ выполняются условия (1.9) с $H = C_{EE}^+$ и $x^+ \in \overline{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$. Справедливость этих условий доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [4] для матрицы $L$ при $\alpha = 1$. Тогда в силу (1.13) для вектора $x^+ - x_k$, определенного формулой (4.3), получим

$$\| x^+ - x_k \|_{C_{EE}^+} \le \left\| [A_{BC}^+ A(E + \alpha CA^T BA)^{-1}]^{2^k} \right\|_{C_{EE}^+} \| x^+ \|_{C_{EE}^+}. \tag{4.4}$$

При доказательстве теоремы 3.1 отмечалось, что для матрицы $A_{BC}^+ A(E + \alpha CA^T BA)^{-1}$ выполняются условия, при которых имеет место равенство (1.31). Тогда в силу (1.31) и (3.5) из (4.4) следует (4.2), т. е. утверждение теоремы 4.1.

Теперь для построения итерационного процесса будем использовать формулу (2.5). Положим $x_k = X_k f$, где матрицы $X_k$ определены формулой (3.9), которую перепишем в виде

$$X_k = \alpha CA^T B \prod_{i=0}^{k-1} \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^i)}\} (E + \alpha ACA^T B)^{-1}.$$

Тогда для вычисления приближения к $x^+$ получим итерационный процесс

$$y_0 = (E + \alpha ACA^T B)^{-1} f, \quad y_k = \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^{k-1})}\} y_{k-1},$$
$$x_k = \alpha CA^T B y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{4.5}$$

**Теорема 4.2.** *Итерационный процесс* (4.5) *сходится в* $\overline{\mathbb{R}}^n(C)$, *причем имеет место оценка*

$$\| x^+ - x_k \|_C \le q^{2^k} \| A_{BC}^+ \|_{CB_{EE}^{+1/2}} \| A \|_{BC_{EE}^{+1/2}} \| x^+ \|_C, \tag{4.6}$$

*где* $q$ *определено в теореме* 3.2, *матрицы* $B$ *и* $C$ *входят в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно* (1.1), (1.2).

***Доказательство.*** Учитывая равенства $x^+ = A_{BC}^+ f$, $x_k = X_k f$, (3.14), то, что матрица $AA_{BC}^+$ идемпотентна и из леммы 1.8 следует, что матрицы $AA_{BC}^+$ и $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$ коммутируют, получаем

$$z = x^+ - x_k = (A^+_{BC} - X_k)f = A^+_{BC}Lf = A^+_{BC}LAA^+_{BC}f = A^+_{BC}LAx^+, \quad (4.7)$$

где $L = [AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]^{2^k}$.

Чтобы воспользоваться соотношением (1.13) для оценки $A^+_{BC}LAx^+$ в норме $\|\cdot\|_C$, необходимо показать, что для матрицы $A^+_{BC}LA$ выполняются условия (1.9) с $H = C$ и $x^+ \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$. Чтобы доказать первое равенство в (1.9), воспользуемся неравенством для ранга произведения двух матриц, соотношением $CC^+_{EE}C = C$, представлением матрицы $A^+_{BC}$ формулой (1.24) и тем обстоятельством, что матрицы $C$ и $C^+_{EE}$ коммутируют. Тогда

$$\operatorname{rank}(A^+_{BC}LA) = \operatorname{rank}(CC^+_{EE}A^+_{BC}LA) \le \operatorname{rank}(CA^+_{BC}LA) \le \operatorname{rank}(A^+_{BC}LA).$$

Для проверки справедливости второго равенства в (1.9) воспользуемся неравенством Фробениуса [16]. В результате получим

$$\operatorname{rank}(A^+_{BC}LA) + \operatorname{rank}(AC) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^+_{BC}LAC) \le$$
$$\le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^+_{BC}LA).$$

Из последних двух соотношений с учетом второго равенства в (1.2) следует (1.9).

В силу равенств (1.24), $C^{+1/2}_{EE}C^{1/2}C = C$, $x^+ = A^+_{BC}f$ имеем $C^{+1/2}_{EE}C^{1/2}x^+ = x^+$, т. е. $x^+ \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$. Тогда согласно (1.13) и замечанию 1.1 из (4.7) получаем

$$\|z\|_C \le \left\|A^+_{BC}LA\right\|_C \left\|x^+\right\|_C \equiv \left\|A^+_{BC}LA\right\|_{CC^{+1/2}_{EE}} \left\|x^+\right\|_C. \quad (4.8)$$

Оценим $\left\|A^+_{BC}LA\right\|_{CC^{+1/2}_{EE}}$. Учитывая те обстоятельства, что матрица $AA^+_{BC}$ идемпотентна, а матрицы $AA^+_{BC}$ и $(E + \alpha ACA^T B)^{-1}$ согласно лемме 1.8 коммутируют, матрицу $L$ можем представить в виде $L = LAA^+_{BC}$. Тогда в силу (1.24) и равенства $BB^{+1/2}_{EE}B^{1/2} = B$ выполняется первое условие в (1.7) для матрицы $A^+_{BC}L$ с $M = B^{+1/2}_{EE}$. Следовательно, имеет место соотношение (1.8), согласно которому

$$\left\|A^+_{BC}LA\right\|_{CC^{+1/2}_{EE}} \le \left\|A^+_{BC}L\right\|_{CB^{+1/2}_{EE}} \|A\|_{BC^{+1/2}_{EE}}. \quad (4.9)$$

Для $A^+_{BC}L$ получена оценка (3.16), которая в данном случае будет иметь вид

$$\left\|A^+_{BC}L\right\|_{CB^{+1/2}_{EE}} \le \left(\rho[AA^+_{BC}(E + \alpha ACA^T B)^{-1}]\right)^{2^k} \left\|A^+_{BC}\right\|_{CB^{+1/2}_{EE}}. \quad (4.10)$$

Учитывая соотношения (4.9), (4.10), (3.17), из (4.8) получаем (4.6), что и завершает доказательство теоремы 4.2.

**5. Итерационные методы для решения задач наименьших квадратов с ограничениями.** В ряде работ (см., например, [21, 22]) решение некоторых задач наименьших квадратов с ограничениями, а также $L$-псевдорешение [23], $Lg$-псевдорешение [24] представляются с помощью $ML$-взвешенных псевдообратных матриц.

Приведем определение $ML$-взвешенных псевдообратных матриц. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $L \in \mathbb{R}^{p\times n}$, тогда $ML$-взвешенная псевдообратная матрица $A^+_{ML}$ к матрице $A$ определяется соотношением [3, 21, 22]

$$A^+_{ML} = \left(E - (LP)^+_{EE}L\right)(MA)^+_{EE}M, \qquad P = E - (MA)^+_{EE}MA. \quad (5.1)$$

Вектор $x = A^{+}_{ML} f$ является решением задачи: найти

$$\min_{x \in \Omega} \| x \|_{L^T L}, \qquad \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{M^T M}. \tag{5.2}$$

В общем случае решение задачи (5.2) является неединственным. В работах [3, 21] определено условие, при котором решение этой задачи будет единственным.

Определим взвешенную псевдообратную матрицу к матрице $A$ с положительно-полуопределенными весами $B$ и $C^{+}_{EE}$ как матрицу, удовлетворяющую системе матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (XAC^{+}_{EE})^T = XAC^{+}_{EE} \tag{5.3}$$

при выполнении условий

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A), \qquad \operatorname{rank}(AC^{+}_{EE}) = \operatorname{rank}(A). \tag{5.4}$$

В работе [10] установлено, что $ML$-взвешенная псевдообратная матрица (5.1) при выполнении условий

$$\begin{gathered} B = M^T M, \qquad C^{+}_{EE} = (L^T L)^{+}_{EE}, \\ \operatorname{rank}(M^T MA) = \operatorname{rank}(A), \qquad \operatorname{rank}\big(A(L^T L)^{+}_{EE}\big) = \operatorname{rank}(A), \\ (Bu, u)_{E_m} \ge 0, \qquad (C^{+}_{EE} v, v)_{E_n} \ge 0 \qquad \forall u \ne 0 \in \mathbb{R}^n, \quad v \ne 0 \in \mathbb{R}^n \end{gathered} \tag{5.5}$$

является взвешенной псевдообратной матрицей, определенной соотношениями (5.3), (5.4).

Наша цель — построить итерационные методы для решения задач наименьших квадратов с ограничениями и задачи вычисления $L$-псевдорешения ($Lg$-псевдорешения), для чего использовать построенные и исследованные в пункте 4 итерационные методы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений и условия (5.5), при которых $ML$-взвешенные псевдообратные матрицы совпадают со взвешенными псевдообратными матрицами с вырожденными весами. В дальнейшем будем предполагать, что эти условия выполняются.

В настоящей работе рассмотрим только задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде квадратичных неравенств. Постановки и методы решения других задач наименьших квадратов с ограничениями можно найти в работах [4, 9, 10], а также в работах [3, 21 – 24].

Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде квадратичных неравенств [21]:

$$\min_{f \in \Omega} \| Kf - g \|_E, \qquad \Omega = \{ f \mid \| f \|_N \le \omega \}, \qquad N = L^T L, \tag{5.6}$$

а также частный случай этой задачи

$$\min_{x \in \Omega^*} \| Ax - b \|_E, \qquad \Omega^* = \{ x \mid \| x \|_N = \omega \}. \tag{5.7}$$

В [21] определены условия, при которых задача (5.6) имеет единственное решение, которое будет определяться с помощью $ML$-взвешенных псевдообратных матриц, что при выполнении условий (5.5) даст формулу для вычисления этого решения

$$f_* = L^{+}_{EC^{+}_{EE}} x_* + (KP_L)^{+}_{EE} g, \qquad C = K^T K, \qquad P_L = E - L^{+}_{EE} L, \tag{5.8}$$

где $x_*$ — решение задачи (5.7) при

$$A = KL^{+}_{EC}, \quad P_L = E - L^{+}_{EE} L, \quad Q_N = E - KP_L (KP_L)^{+}_{EE}, \quad b = Q_N g. \tag{5.9}$$

Для решения задачи (5.7) разработаны эффективные методы (см., например, [25, 26]). Тогда, если решение задачи (5.7) с учетом (5.9) получено, решение задачи (5.6) представляется согласно (5.8) суммой $f_* = f_*^{(1)} + f_*^{(2)}$ взвешенного нормального псевдорешения задачи $Lf^{(1)} = x_*$ с весами $E$ и $C_{EE}^+ = (K^T K)_{EE}^+$ и нормального псевдорешения задачи $KP_L f^{(2)} = g$. Тогда на основании итерационного процесса (4.1) для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ имеем итерационный процесс

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &= \alpha(E + \alpha C_{EE}^+ L^T L)^{-1} C_{EE}^+ L^T x_*, \\ f_k^{(1)} &= \{E + (E + \alpha C_{EE}^+ L^T L)^{-(2^{k-1})}\} f_{k-1}^{(1)} = \\ &= f_{k-1}^{(1)} + (E + \alpha C_{EE}^+ L^T L)^{-(2^{k-1})} f_{k-1}^{(1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty, \end{aligned} \tag{5.10}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ — итерационный процесс

$$\begin{aligned} f_0^{(2)} &= \alpha[E + \alpha(KP_L)^T KP_L]^{-1}(KP_L)^T g, \\ f_k^{(2)} &= \{E + [E + \alpha(KP_L)^T KP_L]^{-(2^{k-1})}\} f_{k-1}^{(2)} = \\ &= f_{k-1}^{(2)} + [E + \alpha(KP_L)^T KP_L]^{-(2^{k-1})} f_{k-1}^{(2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty. \end{aligned} \tag{5.11}$$

На основании итерационного процесса (4.5) для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ имеем итерационный процесс

$$\begin{aligned} y_0^{(1)} &= (E + \alpha L C_{EE}^+ L^T)^{-1} x_*, \qquad y_k^{(1)} = \{E + (E + \alpha L C_{EE}^+ L^T)^{-(2^{k-1})}\} y_{k-1}^{(1)}, \\ f_k^{(1)} &= \alpha C_{EE}^+ L^T y_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty, \end{aligned} \tag{5.12}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ — итерационный процесс

$$\begin{aligned} y_0^{(2)} &= [E + \alpha KP_L(KP_L)^T]^{-1} g, \qquad y_k^{(2)} = \{E + [E + \alpha KP_L(KP_L)^T]^{-(2^{k-1})}\} y_{k-1}^{(2)}, \\ f_k^{(2)} &= \alpha(KP_L)^T y_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty, \end{aligned} \tag{5.13}$$

В заключение отметим, что решение задачи наименьших квадратов с ограничениями в виде линейных равенств, нахождения $L$-псевдорешения, $Lg$-псевдорешения, связанного нормального псевдорешения [27] при некоторых предположениях также определяются суммой взвешенного нормального псевдорешения и обычного нормального псевдорешения (см. [21, 22, 4]), для приближенного решения которых можно использовать (с точностью до обозначений) итерационные процессы (5.10), (5.11) и (5.12), (5.13).

1. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 480 – 482.
2. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1539 – 1556.
3. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
4. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами// Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2005. – **45**, № 10. – С. 1731 – 1755.
5. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstrs Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394 – 395.

6. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **51**, № 3. – P. 406 – 413.
7. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 223 с.
8. *Галба Е. Ф., Молчанов И. Н., Скопецкий В. В.* Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 150 – 169.
9. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 11. – С. 1928 – 1946.
10. *Галба Е. Ф.* Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Там же. – 1999. – **39**, № 6. – С. 882 – 896.
11. *Lancaster P., Rozsa P.* Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1984. – **64**, № 9. – S. 439 – 441.
12. *Икрамов Х. Д.* Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и $H$-самосопряженных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 8. – С. 155 – 169.
13. *Baksalary J. K., Kala R.* Symmetrizers of matrices // Linear Algebra and Appl. – 1981. – **35**, № 1. – P. 51 – 62.
14. *Sen S. K., Venkaiah V. Ch.* On symmetrizing a matrix // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1988. – **19**, № 6. – P. 554 – 561.
15. *Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1323 – 1327.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
18. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
19. *Ben-Israel A., Charnes A.* Contribution to the theory of generalized inverses // J. Soc. Industr. Appl. Math. – 1963. – **11**, № 3. – P. 667 – 699.
20. *Lonseth A. T.* Approximate solution of Fredholm type integral equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1954. – **60**. – P. 415 – 430.
21. *Elden L.* A weighted pseudoinverse generalized singular values and constrained least squares problems // BIT. – 1982. – **22**, № 4. – P. 487 – 502.
22. *Ваарманн О.* Обобщенные обратные отображения. – Таллинн: Валгус, 1988. – 120 с.
23. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
24. *Мелешко В. И.* Исследование устойчивых $L$-псевдообращений неограниченных замкнутых операторов методом регуляризации // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 5. – С. 921 – 935.
25. *Golub G. H.* Some modified eigenvalue problems // SIAM Rev. – 1973. – **15**, № 2. – P. 318 – 334.
26. *Golub G. H., Matt V. von.* Quadratically constrained least squares and quadratic problems // Numer. Math. – 1991. – **59**, № 6. – P. 561 – 580.
27. *Архаров Е. В., Шафиев Р. А.* Методы регуляризации задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2003. – **43**, № 3. – С. 347 – 353.


Получено 17.11.2005