УДК 517.5
Ю. Ю. Трохимчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАДАЧІ ДАНЖУА

We solve the Denjoy problems on the elimination of singularities of analytic functions of measure zero.

Решены задачи Данжуа об устранимости особенностей аналитических функций меры нуль.

На початку XX століття Помпейю і Данжуа [1] знайшли аналітичні функції, які неперервно продовжуються на множину своїх особливих точок. В їхніх прикладах ця множина має топологічну розмірність нуль, але додатну лебегову міру. Проте дуже швидко [2] виникли і функції з особливістю нульової міри.

І саме в цей час Данжуа поставив питання: чи може бути обмеженою похідна скрізь неперервної на площині функції, аналітичної ззовні нульвимірного компакту міри нуль? Це питання, мабуть, виникло у зв'язку з прикладом відомої „канторової драбини" $\theta(x)$, якщо її розглядати як комплексну функцію від $z = x + iy$ (при цьому $\theta = 1$ для $x \geq 1$ і $\theta = 0$ для $x \leq 0$): її похідна $\theta' = 0$ скрізь ззовні „канторового гребінця" $P \times \mathbb{R}^1$ (міри нуль!), де P — канторова досконала множина; водночас ця функція не є скрізь аналітичною.

Данжуа ввів поняття звивистості множини, яке дозволило йому довести, що множина зі скінченною звивистістю (наприклад, коли вона є прямим добутком) не може бути особливою для подібної функції.

І все ж набагато важчим (і важливим) навіть в той час вважалось друге питання Данжуа, яке В. С. Федоров [3] в 30-ті роки минулого століття назвав „проблемою Данжуа".

Нехай $D \subset \mathbb{C}$ — область і $P \subset D$ — нульвимірний досконалий компакт. Чи існує така однозначна неперервна в D аналітична функція, яка голоморфна в $D \backslash P$ і похідна якої неперервно продовжується на P, хоча кожна точка множини P є особливою точкою цієї аналітичної функції?

Цій проблемі еквівалентна наступна.

Чи існує така неперервна в D функція $f(z)$, аналітична в $D \backslash P$, що має кожну точку множини P своєю особливою точкою, для якої буде однозначною в D функція

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz,$$

де інтегрування проводиться вздовж довільної спрямлюваної кривої в $D \backslash P$, яка з'єднує точки z_0 і z.

Відповідь на ці два питання виявиться простим наслідком однієї теореми, яку назвали теоремою про неявну функцію з особливістю [4].

Замкнену ніде не щільну множину $P \subset D$ назвемо простою, якщо локально вона є або нульвимірною, або простою дугою.

Тоді справедливим є таке твердження.

Нехай у прямокутнику $R = [a, b] \times [c, d]$ задано неперервну функцію $F(x, y)$ і просту множину $P \subset R$ такі, що на кожній „вертикалі" $x = \text{const}$ функція $F(\cdot, y)$ зростає на інтервалах суміжності до $P \bigcap \{x = \text{const}\}$. Тоді для кожного x ця функція $F(\cdot, y)$ зростає на всьому відрізку $[c, d]$.

Умова простоти для P в цій теоремі є суттєвою: приклад — функція $F(x, y) = \theta(y)$ в $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$.

З цього твердження легко випливає, що якщо $F(\cdot, y)$ на кожному інтервалі суміжності до $P \bigcap \{x = \mathrm{const}\}$ буде локально ліпшицевою з однією і тією самою константою L, то і у цьому прямокутнику R функція $F(x, y)$ буде ліпшицевою по y з константою L [4].

Для випадку розглядуваних аналітичних функцій можемо уточнити наведені твердження.

Теорема. *Нехай функція* $f: D \to \mathbb{C}$ *є неперервною й аналітичною в* $P \subset D$, *де* P *— проста множина. Якщо скрізь в* $D \setminus P$ *похідна* $f'(z)$ *обмежена числом* L, *то в кожній точці з* P *функція* f *також є локально ліпшицевою з константою* L.

Доведення. Візьмемо круг $U(z_0) \subset D$ для довільної точки $z_0 \in P$.

Нехай $z_1, z_2 \in U$. Використовуючи, якщо потрібно, обертання осей координат у z- і w-площинах $(w = f(z) = u + iv,\ z = x + iy)$, можемо вважати, що відрізки $\overline{z_1 z_2}$ і $\overline{f(z_1) f(z_2)}$ паралельні осям абсцис Ox, Ou, до того ж $z_2 - - z_1 > 0$ і $f(z_2) - f(z_1) > 0$.

За наведеною теоремою обидві функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ на повних горизонталях $y = \mathrm{const}$ в U задовольняють умову Ліпшиця з константою L, оскільки ззовні P частинні похідні $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|$, $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right| \le |f'(z)| \le L$.

Але тоді, зокрема,

$$f(z_2) - f(z_1) \;=\; u(z_2) - u(z_1) \;\le\; L(z_2 - z_1),$$

що й доводить теорему.

Тепер очевидно, що якщо при тих же умовах міра множини P дорівнює нулю, то вона не може бути множиною особливостей. Множина усувається функцією f — це розв'язок першої задачі Данжуа, і навіть з перевищенням, адже Данжуа припускав, що множина P є лише нульвимірною; в розглядуваному ж випадку вона може містити і дуги.

Ми наведемо і розв'язок другої задачі Данжуа, але придивимось уважніше до її умов, причому в першій наведеній нами постановці.

Передусім неперервна продовжуваність похідної $f'(z)$ означає і її обмеженість в $D \setminus P$, а це означає локальну ліпшицевість самої функції f скрізь в області D.

Далі, неперервне продовження $\tilde{f}(z)$ похідної $f'(z)$ на множину P не обов'язково повинно бути похідною первісної функції $f(z)$: це було б так, якби P складалась із ізольованих точок. Про те, що в іншому випадку це вже не так, свідчать приклади скрізь диференційовних сингулярних функцій (такі є в [5]).

Отже, нехай $f(z)$ є неперервною в області D, $P \subset D$ — проста множина, $f(z)$ є аналітичною в $D \setminus P$ і її похідна $f'(z)$ неперервно продовжується на P.

Виберемо довільну точку $z_0 \in P$, і нехай $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \notin P} f'(z) = A$. Для довільного $\varepsilon > 0$ в деякому околі $U(z_0)$ допоміжна функція $\varphi(z) = f(z) - Az$ задовольняє умову $|\varphi'(z)| < \varepsilon$, $z \in U \setminus P$. З наведеної теореми випливає, що тоді функція $\varphi(z)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $\varepsilon > 0$ і, зокрема, в точці $z_0 \in \in P$ маємо $\left|\dfrac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A\right| < \varepsilon$. Це має місце для довільного $\varepsilon > 0$, тобто функція f є моногенною в точці z_0 і її похідна дорівнює граничному значенню A похідної f' з області $D \setminus P$ аналітичності.

Із довільності точки $z_0 \in P$ виводимо, що в умовах другої задачі Данжуа функція f повинна бути аналітичною скрізь в області $D \supset P$.

Це і розв'язує задачу Данжуа; розв'язок виявився таким, якого очікував і сам Данжуа. Знову ж таки, ми це зробили з певним перевищенням: множина P може бути не тільки нульвимірною, але довільною простою (до того ж довільної міри).

1. *Denjoy A.* Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinue de singularités // C. R. – 1909. – **148**. – P. 1154 – 1156.
2. *Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции // Аналитические функции с совершенным множеством особых точек. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 13 – 194.
3. *Федоров В. С.* О последовательностях криволинейных интегралов // Мат. сб. – 1939. – **6**. – С. 53 – 66.
4. *Трохимчук Ю. Ю.* Теорема о неявной функции с особенностями // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **2**, № 3. – С. 262 – 272.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 222 с.

Одержано 15.02.08