УДК 517.946

Ф. И. Мамедов, Р. А. Аманов (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ

For the quasilinear equations $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = 0$ with degeneracy $\omega(x)$ from the Muckenhaupt A_p-class, we prove the Harnack inequality, an estimate of the Hölder norm, and a sufficient test for the regularity of boundary points of the Wiener type.

Для квазілінійних рівнянь $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = 0$ з виродженням $\omega(x)$ із A_p-класу Маккенхаупта доведено нерівність Гарнака, оцінку норми Гельдера і достатню ознаку регулярності межових точок типу Вінера.

1. Введение. В данной статье доказаны неравенство Гарнака, оценка нормы Гельдера и достаточный признак регулярности граничных точек для вырождающихся квазилинейных уравнений вида

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = 0. \tag{1}$$

В случае линейных или квазилинейных уравнений без вырождения эти вопросы достаточно хорошо изучены в работах [1 – 5] (см. также обзорные статьи [6 – 8]). При доказательстве неравенства Гарнака мы будем следовать идеям монографии [9] (а также [6]), в которой применяется лемма возрастания положительных решений уравнений (1) в узких областях. В настоящей статье такая лемма доказывается для уравнений (1), вырождающихся с A_p-условием Маккенхаупта $\omega \in A_p$, $1 \le p < \infty$:

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega^{1-p'} \, dx \right)^{p-1} = A_p < \infty. \tag{2}$$

Здесь Q — произвольный шар в $\mathbb{R}^n$, $|Q|$ — его мера Лебега, p' — сопряженное число к $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $p' = 1$ при $p = \infty$, $p' = \infty$ при $p = 1$, выражение $\left(\int_Q \omega^{1-p'} dx \right)^{p-1}$ имеет смысл $\operatorname*{ess\,sup}_Q \omega^{-1}$ при $p = 1$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, $\operatorname{Lip}(\overline{D})$ — пространство липшицево непрерывных в $\overline{D}$ функций, $\operatorname{Lip}_0(D)$ — линейное подмножество $\operatorname{Lip}(\overline{D})$ функций с компактным носителем в D, $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция, $\omega^{1-p'} \in L_{1,\,\mathrm{loc}}$ при $1 < p < \infty$, $\omega^{-1} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}$ при $p = 1$. Обозначим через $\tilde{W}^1_{p\omega}(D)$ пространство функций $u \in L_{p\omega}(D)$, имеющих в D производные $\{u_{x_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в смысле теории распределений из $L_{p\omega}(D)$, наделенное нормой

$$\|u\|_{\tilde{W}^1_{p\omega}(D)} = \|u\|_{L_{p\omega}(D)} + \|\nabla u\|_{L_{p\omega}(D)}, \tag{3}$$

где $\|u\|_{L_{p\omega}(D)} = \left(\int_D |u|^p \omega \, dx \right)^{1/p}$, $\|\nabla u\|_{L_{p\omega}(D)} = \left(\int_D |\nabla u|^p \omega \, dx \right)^{1/p}$, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Через $\sup\limits_D u$ $\left(\inf\limits_D u\right)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,sup}\limits_D u$ $\left(\operatorname{ess\,inf}\limits_D u\right)$ функции u в D; χ_E обозначает характеристическую функцию множества E.

Замыкание $\mathrm{Lip}(\overline{D})$ $(\mathrm{Lip}_0(D))$ относительно нормы (3) обозначим через $W^1_{p\omega}(D)$ $\left(\overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)\right)$. Если $u_j \in \mathrm{Lip}(\overline{D})$, $\|u_j - u\|_{W^1_{p\omega}(D)} \to 0$, то $\{u_j\}$ называется аппроксимирующей последовательностью для $u \in W^1_{p\omega}(D)$. Пространства $\tilde{W}^1_{p\omega}(D)$, $W^1_{p\omega}(D)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$ являются полными рефлексивными при ω, $\omega^{1-p'} \in L_{1,\,\mathrm{loc}}$, $1 < p < \infty$ (см. [10]). Заметим, что в случае $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, $\tilde{W}^1_{p\omega}(D) = W^1_{p\omega}(D)$ (см. [11, 12]).

В дальнейшем будем использовать неравенство Соболева

$$\left(\int\limits_{Q_R^{x_0}} |u(x)|^{pn'} \omega\, dx\right)^{1/pn'} \le \frac{CR}{\left(\omega(Q_R^{x_0})\right)^{1/np}} \left(\int\limits_{Q_R^{x_0}} |\nabla u(x)|^p \omega\, dx\right)^{1/p}, \quad p \ge 1, \tag{4}$$

$u \in \mathrm{Lip}_0\left(Q_R^{x_0}\right)$ с весом ω, удовлетворяющим условию (2), где $C = C(n,p) A_p^{\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, $C(n,p) > 0$ зависит от n, p; $Q_R^{x_0}$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega\left(Q_R^{x_0}\right) = \int_{Q_R^{x_0}} \omega\, dx$. Неравенство (4) легко выводится из общих весовых результатов относительно неравенства типа Соболева [13] (теорема 5) (см. также [14]) в случае A_p-весов. Из неравенства (4) для функций $u \in \mathrm{Lip}_0\left(Q_R^{x_0}\right)$ следует его выполнение также для $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}\left(Q_R^{x_0}\right)$. Действительно, пусть $\{u_j\}$ аппроксимирует u, тогда для некоторой подпоследовательности $\left\{u_{j_k}\right\}$ $u_{j_k} \to$ $\to u$ почти всюду на $Q_R^{x_0}$ и $\lim\limits_{j_k \to \infty} \left\|\nabla u_{j_k}\right\|_{L_{p\omega}\left(Q_R^{x_0}\right)} = \|\nabla u\|_{L_{p\omega}\left(Q_R^{x_0}\right)} < \infty$. Применяя теорему Фату и переходя к пределу в неравенстве (4), для $\left\{u_{j_k}\right\}$ получаем неравенство (4) в случае $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$.

Пусть $a \in \mathbb{R}^1$, $E \subset D$ — подмножество D, $u \in L_{p\omega}(D)$. Будем говорить, что $u(x) \ge a$ $(u(x) \le a)$ почти всюду на множестве E, если $\mathrm{mes}\{E \cap u(x) < a\}$ $= 0$ $(\mathrm{mes}\{E \cap u(x) > a\} = 0)$. Пусть $a \in \mathbb{R}^1$, $E \subset \overline{D}$. Будем говорить, что $u(x)$ $\ge a$ $(u(x) \le a)$ на E в смысле $W^1_{p\omega}(D)$, если $u_j(x) \ge a$ $\left(u_j(x) \le a\right)$ на E для некоторой аппроксимирующей последовательности $\{u_j\}$. Для $u \in W^1_{p\omega}(D)$, $z \in W^1_{p\omega}(D)$ будем говорить, что $z \ge u$ $(z \le u)$ на $E \subset \overline{D}$ в смысле $W^1_{p\omega}(D)$, если $z_j \ge u_j$ $\left(z_j \le u_j\right)$ на E для соответствующих аппроксимирующих последовательностей.

Для $p \geq 1$, $k \in \mathbb{R}^1$, $u \in W^1_{p\omega}(D)$ положим $\{u\}_k = \max\{u(x), k\}$. Тогда имеет место $\{u\}_k \in W^1_{p\omega}(D)$. Действительно, пусть $u_j \in \mathrm{Lip}(\overline{D})$ аппроксимирует u, $\|u_j - u\|_{W^1_{p\omega}(D)} \to 0$. Покажем, что $\{u_j\}_k \to \{u\}_k$ в $W^1_{p\omega}(D)$ сильно. Выберем из $\{u_j\}$ подпоследовательность (для которой оставляем то же самое обозначение) такую, что $u_j \to u$, $\nabla u_j \to \nabla u$ почти всюду в D. Очевидно, $\{u_j\}_k \in \mathrm{Lip}(\overline{D})$, $\{u\}_k = k + \chi_{u>k}(u-k)$, $\{u_j\}_k = k + \chi_{u_j>k}(u_j - k)$, откуда $\{u_j\}_k - \{u\}_k = (u_j - u)\chi_{u_j>k} + (u-k)\left(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k}\right)$. Тогда, применяя неравенство Минковского

$$\left\| \{u_j\}_k - \{u\}_k \right\|_{L_{p\omega}(D)} \leq$$

$$\leq \left\| (u_j - u)\chi_{u_j>k} \right\|_{L_{p\omega}(D)} + \left\| (u-k)\left(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k}\right) \right\|_{L_{p\omega}(D)} \to 0$$

при $j \to \infty$, так как $\|u_j - u\|_{L_{p\omega}(D)} \to 0$, убеждаемся, что второе слагаемое стремится к нулю в силу мажорантной теоремы Лебега ($\chi_{u_j>k} \to \chi_{u>k}$ почти всюду в D). Из приводимых выше представлений для $\{u_j\}_k$ и $\{u\}_k$ выводим тождество

$$\nabla\{u_j\}_k - \nabla\{u\}_k = (\nabla u_j - \nabla u)\chi_{u_j>k} + \nabla u\left(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k}\right).$$

Тогда, применяя теорему Лебега и учитывая, что $\|\nabla u_j - \nabla u\|_{L_{p\omega}(D)} \to 0$, получаем

$$\left\| \nabla\{u_j\}_k - \nabla\{u\}_k \right\|_{L_{p\omega}(D)} \leq$$

$$\leq \left\| \nabla u_j - \nabla u \right\|_{L_{p\omega}(D)} + \left(\int_D \left| \chi_{u_j>k} - \chi_{u>k} \right|^p |\nabla u|^p \omega\, dx \right)^{1/p} \to 0.$$

Таким образом, $\{u_j\}_k \to \{u\}_k$ сильно в $W^1_{p\omega}(D)$. Пусть $\{u_j\}$ аппроксимирует u и для некоторой его подпоследовательности (для которой оставляем то же самое обозначение) имеет место $\varlimsup\limits_{j \to \infty} \left\| \{u_j\}_k - \{u\}_k \right\|_{W^1_{p\omega}(D)} = \delta > 0$. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся, что из этой подпоследовательности можно выбрать подпоследовательность, для которой (сохраняя обозначение) справедливо соотношение

$$\lim_{j \to \infty} \left\| \{u_j\}_k - \{u\}_k \right\|_{W^1_{p\omega}(D)} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает сильную в $W^1_{p\omega}(D)$ сходимость $\{u_j\}_k \to \{u\}_k$ для любой аппроксимирующей последовательности $\{u_j\} \to u$, что и требовалось доказать.

***Замечание* 1.** Принадлежность $\{u\}_k$ пространству $W^1_{p\omega}(D)$ в [2], а также в [1], показана из других соображений, где существенно используется слабая компактность ограниченного в $W^1_{p\omega}(D)$ множества, что накладывает дополнительное требование $p > 1$. В [1, с. 75] отмечено, что $\{u_j\}_k$ сходится к $\{u\}_k$ в $W^1_{p\omega}(D)$ сильно. Приведенное выше прямое доказательство этого утверждения верно и в случае $p = 1$ (другое доказательство см. в [15, с. 82]).

Близкие рассуждения показывают, что если $u \in W^1_{p\omega}(D)$, $u(x) \le k$, $k \in \mathbb{R}^1$, на ∂D в смысле $W^1_{p\omega}(D)$, то $u_k = \{u(x)\}_k - k$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$. Если $u \in W^1_{p\omega}(D)$, $z \in W^1_{p\omega}(D)$ и $z \ge u$ на ∂D в смысле $W^1_{p\omega}(D)$, то $(u - z)_+ = \max\{u(x) - z(x), 0\}$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$. Пусть $A = \left\{A^j(x, \xi, \eta)\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — измеримая функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям Каратеодори по $x \in D$ и $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$, т. е. $A(\cdot, \xi, \eta)$ — измеримая функция в D для каждого $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ и $A(x, \cdot, \cdot)$ непрерывна в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ для почти всех $x \in D$. Выполняются также следующие условия роста:

$$A(x, \xi, \eta)\eta \ \ge\ \omega(x)|\eta|^p, \tag{5}$$

$$|A(x, \xi, \eta)| \ \le\ \lambda\omega(x)|\eta|^{p-1}, \quad \lambda \in [1, \infty), \tag{6}$$

$$A(x, \xi, -\eta) \ =\ -A(x, \xi, \eta). \tag{7}$$

Будем говорить, что $u \in W^1_{p\omega}(D)$ является субрешением (суперрешением) уравнения (1) в D, если

$$\int\limits_D A(x, u, \nabla u)\nabla\varphi\, dx \ \le\ 0 \quad (\ge 0) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D), \quad \varphi \ge 0. \tag{8}$$

Функцию $u \in W^1_{p\omega}(D)$ будем называть решением уравнения (1) в D, если

$$\int\limits_D A(x, u, \nabla u)\nabla\varphi\, dx \ =\ 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D). \tag{9}$$

2. Неравенство Гарнака и оценка нормы Гельдера.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in A_p$, D *— область в* $Q^{x_0}_R$, *имеющая предельные точки на сфере* $S^{x_0}_R$ *и пересекающая шар* $Q^{x_0}_{R/2}$. *Предположим, что* $u \in W^1_{p\omega}(D)$ *— положительное ограниченное субрешение уравнения* (1), *обращающееся в нуль в смысле* $W^1_{p\omega}(D)$ *на части* Γ *границы области* D, *лежащей строго внутри шара* $Q^{x_0}_R$, *и выполнены условия* (5) – (7). *Тогда для любого* $A > 0$ *найдется постоянная* $\delta > 0$, *зависящая от* n, p, λ, A_p *и* A, *такая, что при*

$$|D| \ <\ \delta R^n \tag{10}$$

выполняется неравенство

$$\sup_D u \ \ge\ A \sup_{D \cap Q^{x_0}_{R/2}} u. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $u(x) \le M$ $(M > 0)$ на $S^{x_0}_R \cap \overline{D}$ в смысле $W^1_{p\omega}(D)$. Обозначим $z(x) = (u(x) - M\xi)_+$, $\xi = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{|x - x_0|^2}{R^2} - \dfrac{1}{4}\right)_+$. Пусть $k \in \left(0, \sup\limits_{\overline{D}} z\right]$, положим $z_k = \{z(x)\}_k - k$, $D_k = \{x \in D\colon z(x) > k\}$. Очевидно, $D_k \subset D \cap Q^{x_0}_R$ и, как отмечено выше, $z_k \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}\left(Q^{x_0}_R\right)$, $z_k \ge 0$. Полагая в (8) $\varphi = z_k$, получаем

$$\int\limits_{D_k} A(x, u, \nabla u)\nabla z\, dx \ \le\ 0,$$

или, что то же самое, $\int_{D_k} A(\nabla u - M\nabla\xi)\,dx \le 0$. Отсюда с учетом (5), (6) имеем

$$\int\limits_{D_k} \omega|\nabla u|^p\,dx \;\le\; \frac{3M\lambda}{R}\int\limits_{D_k} |\nabla u|^{p-1}\omega\,dx.$$

Применяя неравенство Гельдера, находим

$$\int\limits_{D_k} \omega|\nabla u|^p\,dx \;\le\; (3\lambda)^p\left(\frac{M}{R}\right)^p \int\limits_{D_k} \omega\,dx. \tag{12}$$

Заметим, что $|\nabla z| \le |\nabla u| + \dfrac{3M}{R}$ в D_k. Тогда в силу неравенства $(a+b)^p \le$ $\le 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, $1 \le p < \infty$, имеем $|\nabla z|^p \le 2^{p-1}\left(|\nabla u|^p + 3^p\left(\dfrac{M}{R}\right)^p\right)$. Поэтому из (12) получаем

$$\int\limits_{Q_R^{x_0}} |\nabla z_k|^p\omega\,dx \;\le\; C_1\left(\frac{M}{R}\right)^p \int\limits_{D_k} \omega\,dx, \quad C_1 = 3^p 2^{p-1}(\lambda^p + 1).$$

Применяя неравенство (4) к левой части, с помощью неравенства Гельдера находим

$$\int\limits_{Q_R^{x_0}} z_k\omega\,dx \;=\; \int\limits_{D_k} z_k\,\omega\,dx \;\le\; \left(\int\limits_{D_k} z_k^{pn'}\omega\,dx\right)^{1/pn'}\left(\int\limits_{D_k}\omega\,dx\right)^{1-1/pn'} \;\le$$

$$\le\; \frac{CC_1^{1/p}M}{\left(\omega(Q_R^{x_0})\right)^{1/pn}}\left(\int\limits_{D_k}\omega\,dx\right)^{1+1/np},$$

откуда получаем

$$\int\limits_{D_k} z_k\,\omega\,dx \;\le\; \frac{CM}{\left(\omega(Q_R^{x_0})\right)^{1/pn}}\left(\int\limits_{D_k}\omega\,dx\right)^{1+1/np},$$

где $C > 0$ зависит от n, p, λ, A_p. Полагая $\beta(k) = \int_{D_k}\omega z_k\,dx$, имеем $\beta'(k) =$ $= -\int\limits_{D_k}\omega\,dx$. Тогда

$$\beta(k) \;\le\; \frac{CM}{\left(\omega(Q_R^{x_0})\right)^{1/pn}}(-\beta'(k))^{1+1/np}. \tag{13}$$

Решая дифференциальное неравенство с учетом $\beta(\sup\limits_{D'} z) = 0$, находим

$$\sup_{D'} z \;\le\; C_2(1+np)\left[\frac{M}{\left(\omega(Q_R^{x_0})\right)^{1/pn}}\right]^{np/(np+1)}\beta(0)^{1/(1+np)},$$

где $D' = \{x \in D\colon z(x) > 0\}$, $C_2 = C^{np/(np+1)}$, откуда с помощью (13) получаем

$$\sup_{D'} z \;\le\; CM\left(\frac{\omega(D')}{\omega(Q_R^{x_0})}\right)^{1/np},$$

так как $C_2 C^{1/(np+1)} = C$. Учитывая, что $\sup\limits_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} u = \sup\limits_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} z \le \sup\limits_{D'} z$, имеем $\sup\limits_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} u(x) \le C_3 M \left(\dfrac{|D'|}{\left|Q_R^{x_0}\right|}\right)^{\varepsilon/np}$, так как из $\omega \in A_p$ следует, что $\omega \in A_\infty$ и существуют C и $\varepsilon > 0$ такие, что $\dfrac{\omega(E)}{\omega(Q)} \le C\left(\dfrac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon}$ для любых $Q \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset Q$. В силу того, что $D' \subset D$, получаем $\sup\limits_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} u \le C_3 M \left(\dfrac{|D|}{R^n}\right)^{\frac{\varepsilon}{np}}$, где $C_3 > 0$, $\varepsilon > > 0$ зависят от n, p, λ, A_p. С учетом условия (10), выбирая $\delta > 0$ из соотношения $C_3 \delta^{\varepsilon/np} = \dfrac{1}{A}$, имеем

$$M \ge A \sup_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} u(x),$$

откуда вследствие выбора M такого, что $\sup\limits_D u \ge M$, следует

$$\sup_D u \ge A \sup_{D\cap Q_{R/2}^{x_0}} u.$$

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 2.** Лемма 1 остается также в силе для решений $u \in W_{p\omega}^1(D) \cap \cap C(\overline{D})$ уравнения (1), равных нулю на Γ.

Лемма 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in A_p$, $D \subset Q_R^{x_0}$ — *область, имеющая предельные точки на сфере* $S_R^{x_0}$ *и содержащая точку* x_0. *Предположим, что* $u \in W_{p\omega}^1(D)$ — *положительное ограниченное субрешение уравнения* (1) *в* D, *обращающееся в нуль в смысле* $W_{p\omega}^1(D)$ *на части* Γ *границы области* D, *лежащей строго внутри шара* $Q_R^{x_0}$, *и выполнены условия* (5) – (7). *Тогда найдется постоянная* $\delta > 0$, *зависящая от* n, p, λ, A_p, *такая, что при*

$$|D| < \delta R^n$$

имеет место неравенство

$$\sup_D u \ge \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{Q_\varepsilon^{x_0}} u(x) \exp\left\{\gamma\left(\frac{R^n}{|D|}\right)^{1/(n-1)}\right\}, \tag{14}$$

где $\gamma > 0$ *зависит от* n, p, λ, A_p.

Лемма 2 выводится из леммы 1 по стандартной схеме [16] (§ 4) с применением принципа максимума (см. ниже).

***Замечание* 3.** В условиях леммы 2 с учетом замечания 2 для решений уравнения (1) $u \in W_{p\omega}^1(D) \cap C(\overline{D})$, равных нулю на Γ, выполняется оценка

$$\sup_D u \ge u(x_0) \exp\left\{\gamma\left(\frac{R^n}{|D|}\right)^{1/(n-1)}\right\}.$$

Лемма 3 (принцип максимума). *Пусть* D — *ограниченная область*, $u \in \in W_{p\omega}^1(D)$ — *субрешение* (*суперрешение*) *уравнения* (1) *в* D *и выполнены условия* (5) – (7). *Тогда если* $u(x) \le M$ $(u(x) \ge M)$ *на* ∂D *в смысле* $W_{p\omega}^1(D)$, *то* $u(x) \le M$ $(u(x) \ge M)$ *почти всюду в* D.

Доказательство. Положим $D' = \{x \in D \colon u(x) \ge M\}$, $\varphi = \max\{u(x) - M, 0\}$ — пробная функция для (8). Тогда $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$, $\varphi \ge 0$ и $\int\limits_{D'} A\nabla\varphi\, dx \le 0$, т. е. $\int\limits_{D'} A\nabla u\, dx \le 0$ и $\nabla u \equiv 0$ почти всюду в D', откуда в силу неравенства (4) следует, что $u \equiv M$ почти всюду в D'. Вторая часть леммы 3 доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ *и область* D, *расположенная в шаре* $Q_R^{x_0}$, *пересекает шар* $Q_{R/4}^{x_0}$ *и имеет предельные точки на* $S_R^{x_0}$. *Предположим, что* Γ — *часть границы* D, *лежащая строго внутри шара* $Q_R^{x_0}$, $u \in W^1_{p\omega}(D)$ — *положительное ограниченное субрешение уравнения* (1), *обращающееся в нуль на* Γ *в смысле* $W^1_{p\omega}(D)$, *и выполняются условия* (5) – (7), $\sup\limits_{D\cap Q_{R/4}^{x_0}} u = m$, D_2 — *множество* $Q_{R/2}^{x_0} \setminus D$, *а* D_1 — *множество* $\left\{x \in D \cap Q_{R/2}^{x_0} \colon 0 < u(x) < \frac{m}{2}\right\}$, $D_0 = \left\{x \in D \cap Q_{R/2}^{x_0} \colon u(x) \ge \frac{m}{2}\right\}$.

Тогда для любых $A > 0$, $0 < \sigma < 2^{-n}\sigma_n/n$ *найдется такая постоянная* $\varepsilon > 0$, *зависящая от* n, p, λ, A_p, A *и* σ, *что из неравенств* $|D_1| < \varepsilon R^n$, $|D_0| > \sigma R^n$, $|D_2| > \sigma R^n$ *следует, что*

$$\sup_D u \ \ge\ Am.$$

Доказательство. Пусть u_j аппроксимирует u, $u_j = 0$ на D_2. Для некоторой подпоследовательности, для которой сохраняется прежнее обозначение, сходимость $u_j \to u$, $\nabla u_j \to \nabla u$ будет равномерной вне некоторого открытого множества D_δ нелинейной емкости $\mathrm{cap}_{p\omega}(D_\delta) < \delta$, $\delta > 0$ — произвольное число (см. [17, с. 300], определение нелинейной емкости в (29)). Тогда $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа границы ∂D_δ, совпадающую с нелинейной емкостью множества D_δ при $p = 1$, $\omega \equiv 1$ (см. [17, с. 97]), также можно считать произвольно малой. Пусть $\delta < \frac{\sigma R^n}{2}$ такое, что $\left|u_j - u\right| < \frac{m}{4}$ в $D \setminus D_\delta$ при $j \ge j_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int\limits_{D_1} |\nabla u| dx \ &\ge \int\limits_{D_1\setminus D_\delta} |\nabla u| dx \ \ge\ \frac{1}{2}\int\limits_{D_1\setminus D_\delta} \left|\nabla u_j\right| dx \ \ge \\ &\ge\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{m/4} \mathrm{mes}_{n-1}\left\{x \in (D\setminus D_\delta)\cap Q_{R/2}^{x_0} \colon u_j(x) = t\right\} dt \ \ge \\ &\ge\ \frac{m}{8}(\sigma R^n)^{(n-1)/n}\beta_n \ \ge\ \frac{m}{8}\beta_n \sigma^{(n-1)/n} R^{n-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь использовано то, что в шаре $Q_{R/2}^{x_0}$ поверхность $\{x \in (D\setminus D_\delta) \cap Q_{R/2}^{x_0} \colon u_j(x) = t,\ t \in (0, m/4)\}$ отделяет множество D_2 от множества $D_0 \setminus D_\delta$, мера Лебега каждого из которых больше или равна σR^n. Поэтому для этой поверхности имеет место изопериметрическое неравенство

$$\operatorname{mes}_{n-1}\left\{x \in (D \setminus D_\delta) \cap Q_{R/2}^{x_0} :\ u_j(x) = t,\ t \in (0, m/4)\right\} \geq$$

$$\geq \beta_n (\sigma R^n)^{(n-1)/n} = \beta_n \sigma^{(n-1)/n} R^{n-1}$$

(см. [9, с. 258]). Кроме того, была учтена произвольность δ и применена формула Федерера (см. [17, с. 40]), из которой следует, что

$$\int\limits_{D_1 \setminus D_\delta} |\nabla u_j|\, dx \geq \int\limits_0^{m/4} \operatorname{mes}_{n-1}\left\{x \in (D \setminus D_\delta) \cap Q_{R/2}^{x_0} :\ u_j(x) = t\right\} dt.$$

Согласно неравенству Гельдера имеем

$$\int\limits_{D_1} |\nabla u|\, dx \leq \left(\int\limits_{D_1} |\nabla u|^p \omega\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{D_1} \omega^{1-p'} dx\right)^{1/p'}$$

в силу $\omega^{1-p'} \in A_{p'} \subset A_\infty$ и $D_1 \subset D \cap Q_{R/2}^{x_0}$, откуда следует, что

$$\int\limits_{D_1} |\nabla u|\, dx \leq C \left(\frac{|D_1|}{\left|Q_R^{x_0}\right|}\right)^{\delta/p'} \left(\int\limits_{Q_R^{x_0}} \omega^{1-p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{D \cap Q_{R/2}^{x_0}} |\nabla u|^p \omega\, dx\right)^{1/p}, \qquad (16)$$

где $C,\ \delta > 0$ зависят от условия (2).

Пусть $0 \leq \eta(t) \leq 1$ — дифференцируемая функция, $\eta(t) \equiv 1$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\eta(t) \equiv 0$ при $t \geq 1$, $|\eta'| \leq C_0$. Положим $\varphi = u(x)\left(\eta\left(\frac{|x - x_0|}{R}\right)\right)^p$ в (8) в качестве пробной функции. Тогда $\int_D \left(A \nabla u \eta^p + p A \nabla \eta u \eta^{p-1}\right) dx \leq 0$, откуда следует, что $\int_D \omega |\nabla u|^p \eta^p\, dx \leq p\lambda \int_D \omega u |\nabla \eta| (\eta |\nabla \eta|)^{p-1} dx$. В силу неравенства Гельдера выводим

$$\int\limits_D \omega |\nabla u|^p \eta^p\, dx \leq (p\lambda)^p \int\limits_D \omega |\nabla u|^p u^p\, dx,$$

поэтому

$$\int\limits_{D \cap Q_R^{x_0}} \omega |\nabla u|^p\, dx \leq \left(\frac{p\lambda C_0}{R}\right)^p \left(\sup_D u\right)^p \omega\left(Q_R^{x_0}\right). \qquad (17)$$

С учетом условия $|D_1| < \varepsilon R^n$ из (15) – (17) получаем

$$\sup_D u \geq \frac{\sigma^{\frac{n-1}{n}} m R^n \beta_n}{8 p \lambda C_0 C \varepsilon^{\delta/p'}} \left[\omega\left(Q_R^{x_0}\right) \left(\int\limits_{Q_R^{x_0}} \omega^{1-p'} dx\right)^{p-1}\right]^{-1/p}. \qquad (18)$$

Из (18) с учетом условия $\omega \in A_p$ следует, что

$$\sup_D u \geq \frac{\sigma^{\frac{n-1}{n}} A_p^{-1/p} \beta_n n}{C C_0 p \lambda 8 \varepsilon^{\delta/p'} \sigma_n} m, \quad \sigma_n = \left|S(R^n)\right|. \qquad (19)$$

Осталось выбрать в (19) постоянную $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\frac{\sigma^{\frac{n-1}{n}} A_p^{-1/p} \beta_n n \sigma_n^{-1}}{C C_0 p \lambda 8 \varepsilon^{\delta/p'}} = A,$$

тогда $\sup\limits_D u \geq Am$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, D *— область, лежащая в шаре* $Q_R^{x_0}$, *пересекающая шар* $Q_{R/4}^{x_0}$ *и имеющая предельные точки на сфере* $S_R^{x_0}$. *Предположим, что* Γ *— та часть границы* D, *которая расположена строго внутри шара* $Q_R^{x_0}$, $u \in W_{p\omega}^1(D)$ *— положительное ограниченное решение уравнения* (1) *в* D, *обращающееся в нуль на* Γ *в смысле* $W_{p\omega}^1(D)$, *и выполняются условия* (5) – (7). *Положим* $H = Q_{R/4}^{x_0} \setminus D$.

Тогда для любого $\tau \in (0, 2^{-2n}\sigma_n/n)$ *существует* $\gamma > 0$ *такое, что из условия* $|H| > \tau R^n$ *следует, что*

$$\sup_D u \geq (1+\gamma) \sup_{D \cap Q_{R/4}^{x_0}} u,$$

где $\gamma > 0$ *— константа, зависящая от* n, p, λ, A_p, τ.

Лемма 5 выводится из лемм 1, 4 по стандартной схеме [9, с. 143] (с применением леммы 3).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ *и в шаре* $Q_R^{x_0}$ *определено положительное ограниченное решение* $u \in W_{p\omega}^1\left(Q_R^{x_0}\right)$ *уравнения* (1), *для которого выполняются условия* (5) – (7). *Тогда существует константа* $C > 0$, *зависящая от* n, p, λ, A_p, *такая, что*

$$\sup_{Q_{R/4}^{x_0}} u \Big/ \inf_{Q_{R/2}^{x_0}} u \leq C. \tag{20}$$

Теорема 1 выводится из лемм 1, 5 по стандартной схеме [6, с. 115].

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, $u \in W_{p\omega}^1(D)$, *— ограниченное решение уравнения* (1), *для которого выполняются условия* (5) – (7). *Тогда для почти всех* x, x' *из* $D_\rho = \{ x \in D\colon \operatorname{dist}\left(x, R^n \setminus D\right) \geq \rho \}$ *имеет место оценка*

$$|u(x) - u(x')| \leq C|x - x'|^\alpha,$$

где $0 < \alpha \leq 1$ *зависит от* n, p, λ, A_p, *а* $C > 0$ *— еще и от* $\rho > 0$.

Доказательство. Обозначим $m_R^{x_0} = \inf\limits_{Q_R^{x_0}} u$, $M_R^{x_0} = \sup\limits_{Q_R^{x_0}} u$, $\operatorname{osc}\limits_{Q_R^{x_0}} u = M_R^{x_0} - m_R^{x_0}$, $R > 0$. Применяя неравенство Гарнака для любого шара $Q_{2R}^{x_0} \subset D$ и функций $v = u - m_{2R}^{x_0}$, $w = M_{2R}^{x_0} - u$, имеем

$$M_R^{x_0} - m_{2R}^{x_0} \leq C\left(m_R^{x_0} - m_{2R}^{x_0}\right), \qquad M_{2R}^{x_0} - m_R^{x_0} \leq C\left(M_{2R}^{x_0} - M_R^{x_0}\right).$$

Мы вправе применить неравенство Гарнака к функциям v, w, так как для них получаются уравнения вида (1) с теми же постоянными, что и для решения $u(x)$ в условиях (5) – (7).

Учитывая последние неравенства, получаем

$$\operatorname*{osc}_{Q_{2R}^{x_0}} u \;\geq\; \frac{C+1}{C-1} \operatorname*{osc}_{Q_R^{x_0}} u, \tag{21}$$

где $C > 0$ — константа неравенства Гарнака (не зависит от u).

Многократное применение оценки (21) доказывает теорему 2 (см., например, [9, с. 59]).

3. Достаточный признак регулярности граничных точек. Для простоты изложения в этом пункте ограничимся уравнениями вида (1) с функциями $A = \left\{A^j(x, \eta)\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, не зависящими от ξ (решения), относительно которых будем предполагать измеримость по $x \in D$ для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$ для почти всех x — непрерывность по $\eta \in \mathbb{R}^n$, считать, что выполнены условия (5) – (7) и

$$(A(x, p) - A(x,q))(p - q) \;>\; 0 \tag{22}$$

при $p \neq q$, $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $x \in D$.

Существование и единственность.

Лемма 6. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $V = \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$, V' — сопряженное пространство к V, $\phi \in W^1_{p\omega}(D)$, $f \in V'$ — заданные функции и выполняются условия $p > 1$, (5) – (7) и (22). Тогда существует единственное решение $u \in W^1_{p\omega}(D)$ уравнения*

$$-\operatorname{div} A(x, \nabla u) \;=\; f, \tag{23}$$

удовлетворяющее условию $u - \phi \in V$.

Доказательство. Положим $z = u - \phi$. Тогда $z \in V$, $u = z + \phi$, $\nabla u = \nabla z + \nabla\phi$,

$$\int_D A(x, \nabla z + \nabla\phi)\nabla\varphi\, dx \;=\; \int_D f\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in V. \tag{24}$$

Оператор $A_1 \colon V \to V'$, действующий по правилу

$$\langle A_1(z), \varphi\rangle \;=\; \int_D A(x, \nabla z + \nabla\phi)\nabla\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in V,$$

имеет следующие свойства.

Ограниченность. По свойству (6) имеем

$$|\langle A_1(z), \varphi\rangle| \;\leq\; \lambda \int_D |\nabla z + \nabla\phi|^{p-1}\omega |\nabla\varphi|\, dx \;\leq\; \lambda \|\nabla z + \nabla\phi\|^{p-1}_{L_{p\omega}(D)} \|\nabla\varphi\|_{L_{p\omega}(D)},$$

откуда

$$\|A_1(z)\|_{V'} \;\leq\; \lambda\Big(\|z\|_{W^1_{p\omega}(D)} + \|\phi\|_{W^1_{p\omega}(D)}\Big)^{p-1}.$$

Монотонность. Для любых $z \neq \tilde{z}$ из V в силу условия (22) выполняется неравенство

$$\langle A_1(z) - A_1(\tilde{z}), z - \tilde{z}\rangle \;=$$

$$= \int_D [A(x, \nabla z + \nabla\phi) - A(x, \nabla\tilde{z} + \nabla\phi)][\nabla z + \nabla\phi - (\nabla\tilde{z} + \nabla\phi)]\, dx \;>\; 0.$$

Коэрцитивность. На основании свойств (5), (6) и ε-неравенства Коши $ab \leq \varepsilon a^{p'} + C(\varepsilon) b^p$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$\langle A_1(z), z\rangle = \int_D A(x, \nabla z + \nabla\phi)\nabla z\, dx \geq C_1 \int_D |\nabla z|^p \omega\, dx - C_2\|\phi\|^p_{W^1_{p\omega}(D)},$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ не зависят от z, ϕ. Далее, согласно неравенству (4)

$$\langle A_1(z), z\rangle \geq C_3\|z\|^p_{W^1_{p\omega}(D)} - C_2\|\phi\|^p_{W^1_{p\omega}(D)},$$

откуда

$$\frac{\langle A_1(z), z\rangle}{\|z\|_V} \to \infty \quad \text{при} \quad \|z\|_V \to \infty.$$

Семинепрерывность. Установим непрерывность выражения

$$\langle A_1(z + t\tilde{z}), \varphi\rangle = \int_D A(x, \nabla z + t\nabla\tilde{z} + \nabla\phi)\nabla\varphi\, dx$$

по параметру $t \in \mathbb{R}^1$, где φ, z, $\tilde{z}$ принадлежат V.

Пусть $t_n \to t_0$. По предположению функции $\{A^j(x, \nabla z + t\nabla\tilde{z} + \nabla\phi)\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно зависят от параметра t. Подынтегральное выражение мажорируется интегрируемой функцией

$$|A(x, \nabla z + t_n\nabla\tilde{z} + \nabla\phi)\nabla\varphi| \leq \lambda|\nabla z + t_n\nabla\tilde{z} + \nabla\phi|^{p-1}\omega|\nabla\varphi| \leq$$
$$\leq 4^{p-1}\lambda\left(|\nabla z|^p + 2|t_0|^p|\nabla\tilde{z}|^p + |\nabla\phi|^p\right)\omega$$

при $n \geq n_0$. Поэтому на основании мажорантной теоремы Лебега получаем

$$\langle A_1(z + t_n\tilde{z}), \varphi\rangle \to \langle A_1(z + t_0\tilde{z}), \varphi\rangle \quad \text{при} \quad t_n \to t_0.$$

Теперь после того, как установлены изложенные выше свойства оператора A_1: $V \to V'$, на основе [18, с. 182] (теорема 2.1) (или [19], гл. 2) получаем существование решения $z \in V$ задачи $A_1(z) = f \quad \forall f \in V'$. Тогда $u = z + \phi$ будет решением задачи $-\operatorname{div} A(x, \nabla u) = f$, $u - \phi \in V$, $u \in W^1_{p\omega}(D)$.

Докажем единственность. Пусть $u \in W^1_{p\omega}(D)$, $\tilde{u} \in W^1_{p\omega}(D)$, — два решения предыдущей задачи. Тогда $u - \tilde{u} \in V$, поэтому из уравнения (23) следует

$$\int_D [A(x, \nabla u) - A(x, \nabla\tilde{u})](\nabla u - \nabla\tilde{u})\, dx = 0.$$

В силу (22) отсюда выводим, что $\nabla(u - \tilde{u}) \equiv 0$ почти всюду в D, т. е. $u \equiv \tilde{u}$ почти всюду в D в силу неравенства (4).

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $z \in W^1_{p\omega}(D)$ *— суперрешение, а* $u \in W^1_{p\omega}(D)$ *— субрешение уравнения* (1) *в* D, *причем* $z(x) \geq u(x)$ *на* ∂D *в смысле* $W^1_{p\omega}(D)$. *Тогда* $z(x) \geq u(x)$ *почти всюду в* D.

Доказательство. Положим $D' = \{x \in D\colon u(x) \geq z(x)\}$. Как отмечено выше, $(u - z)\chi_{u \geq z} \in \mathring{W}^1_{p\omega}(D)$. Тогда

$$\int_D [A(x, \nabla u) - A(x, \nabla z)](\nabla u - \nabla z)\chi_{u\geq z}\, dx \leq 0,$$

откуда $\nabla(u - z) \equiv 0$ почти всюду в D' и, следовательно, в силу (4) $u \equiv z$ почти всюду в D'.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $E \subset D$ *— компактное подмножество,* $u \in \mathring{W}^1_{p\omega}(D)$ *— ре-*

шение уравнения (1) *в* $D \setminus E$, $u(x) \geq M$ *на* E $(M > 0)$. *Тогда для аппроксимирующей последовательности* $\{u^j\}$ *при почти всех* $t \in [0, M^j]$ *справедливо равенство*

$$t \int\limits_{\partial \Sigma_t^j} A(x, \nabla u^j) n \, d\sigma = \int\limits_{D \setminus \Sigma_t^j} A(x, \nabla u^j) \nabla u^j dx + \delta_j,$$

где $\Sigma_t^j = \{ x \in D \colon u^j(x) > t \}$, n — *нормаль к* $\partial \Sigma_t^j$, *направленная в сторону* E, $M^j = \min\limits_{x \in E} u^j(x)$, $\delta_j \to 0$ *при* $j \to \infty$.

Доказательство. Выберем пробную функцию $\varphi = g_h u^j$, где при $g_h = \dfrac{t - u^j}{h}$ при $t - h < u^j < t$, $g_h = 1$ при $u^j \leq t - h$, $g_h = 0$ при $u^j \geq t$. Тогда $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D \setminus E)$ и из (9) получим

$$\delta_j - \frac{1}{h} \int\limits_{t - h < u^j < t} A(\cdot, \nabla u^j) \nabla u^j \cdot u^j \, dx + \int\limits_{u^j < t} A(\cdot, \nabla u^j) \nabla u^j g_h \, dx = 0, \quad h > 0. \tag{25}$$

Это следует из того, что u — решение уравнения (1), $\{u^j\}$ — аппроксимирующая последовательность для него, т. е.

$$-\int\limits_{D \setminus E} A(x, \nabla u^j) \nabla \varphi \, dx = \delta_j,$$

где $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$ для любого $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D \setminus E)$. Это следует из теоремы Витали в силу того, что $u^j \to u$, $\nabla u^j \to \nabla u$ почти всюду в $D \setminus E$ и интегралы $\int_{D \setminus E} A(x, \nabla u^j) \nabla \varphi \, dx$ равностепенно абсолютно непрерывны, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что для любого множества $V \subset D \setminus E$, $|V| < < \eta$, выполнено неравенство

$$\int\limits_V \left| A(x, \nabla u^j) \nabla \varphi \right| dx < \varepsilon$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$.

Для второго слагаемого в (25) согласно формуле Федерера и теореме Лебега [20, с. 16] для почти всех $t \in [0, M^j]$ при $h \to +0$ имеем

$$\frac{1}{h} \int\limits_{t-h}^{t} s \, ds \left(\int\limits_{\partial \Sigma_s^j} \frac{A(\cdot, \nabla u^j) \nabla u^j}{\left| \nabla u^j \right|} d\sigma \right) \to t \int\limits_{\partial \Sigma_t^j} A(\cdot, \nabla u^j) n \, d\sigma,$$

а также $\int_{\{u^j(x) < t\}} A \nabla u^j \cdot g_h \, dx \to \int_{\{u^j(x) < t\}} A \nabla u^j \, dx$ при $h \to 0$ на основе мажорантной теоремы Лебега. Из (25), переходя к пределу при $h \to 0$ с учетом этих соотношений, получаем требуемое равенство.

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть* $u \in W^1_{p\omega}(G)$ — *решение уравнения* (1) *в области* G, $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ — *аппроксимирующая последовательность для него. Тогда для почти всех* t_1, t_2 *из области значений функции* $u^j(x)$ *справедливо равенство*

$$\int_{\partial\Sigma_{t_1}^j} A(x, \nabla u^j) n \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma_{t_2}^j} A(x, \nabla u^j) n \, d\sigma + \delta_j, \tag{26}$$

где $\Sigma_t^j = \{ x \in G : u^j(x) > t \}$, $\delta_j \to 0$ *при* $j \to 0$, n — *нормаль к* $\partial\Sigma_t^j$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8; достаточно заметить только, что

$$\int_G A(x, \nabla u^j) \nabla\varphi \, dx = \delta_j, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(G), \tag{27}$$

где $\delta_j \to 0$ в силу того, что u — решение уравнения.

Лемма 10. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$, D — *область в шаре* $Q_{4R}^{x_0}$, *пересекающая* $Q_R^{x_0}$ *и имеющая предельные точки на* $S_{4R}^{x_0}$. *Предположим, что* $u \in \in W_{p\omega}^1(D)$ — *положительное ограниченное решение уравнения* (1), *обращающееся в нуль в смысле* $W_{p\omega}^1(D)$ *на части* Γ *границы области* D, *лежащей строго внутри шара* $Q_{4R}^{x_0}$, *и выполнены условия* (5) – (7) *и* (22). *Тогда*

$$\sup_D u \geq \left[1 + \eta \left(\frac{\operatorname{cap}_{p\omega} H}{\omega\left(Q_R^{x_0}\right)} R^p \right)^{p'-1} \right] \sup_{D \cap Q_R^{x_0}} u, \tag{28}$$

где $\eta > 0$ *зависит только от* n, p, A_p; $H = Q_R^{x_0} \setminus D$, $\operatorname{cap}_{p\omega} H$ — *его нелинейная весовая емкость*:

$$\operatorname{cap}_{p\omega} H = \inf \left\{ \int_{R^n} \omega |\nabla z|^p dx : z \in \operatorname{Lip}_0(R^n),\ z \geq 1 \text{ на } H \right\}. \tag{29}$$

Доказательство. Положим $M = \sup_D u$, и пусть $G = Q_{4R}^{x_0} \setminus H$. Существует $\phi \in \operatorname{Lip}\left(\overline{G}\right)$, равная M на ∂H и нулю на $S_{4R}^{x_0}$, такая, что $\phi \in \tilde{W}_{p\omega}^1(G)$, а из $\omega \in A_p$ следует, что $\phi \in W_{p\omega}^1(G)$ (мы воспользовались тем, что любую липшицевую функцию в замкнутом подмножестве $E \subset \mathbb{R}^n$ можно продолжить на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением ее липшицевости, см. [20, с. 206]).

Пусть U_h — решение задачи

$$\operatorname{div} A(x, \nabla U_H) = 0 \quad \text{в} \quad G, \qquad U_H - \phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(G), \qquad U_H \in W_{p\omega}^1(G). \tag{30}$$

Существование и единственность решения рассматриваемой задачи вытекает из леммы 6. Положим $z = M - U_H$ в G. Тогда z является решением уравнения (1) и $z - M + \phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(G)$. Поэтому существуют $\psi_j \in \operatorname{Lip}_0(G)$, аппроксимирующие $z - M + \phi$, такие, что функции $\alpha_j = M - \phi + \psi_j$ будут аппроксимировать функцию z в G, причем $\alpha_j \in \operatorname{Lip}\left(\overline{G}\right)$ в силу $\phi \in \operatorname{Lip}\left(\overline{G}\right)$. Тогда $z(x) > 0$ на $S_{4R}^{x_0}$ в смысле $W_{p\omega}^1(D)$ и $z(x) = 0$ на ∂H. Применим лемму 7 к решениям z, u в области D. Имеем $z(x) \geq u(x)$ на $\Gamma U S_{4R}^{x_0}$ в смысле $W_{p\omega}^1(D)$; $z|_{S_{4R}^{x_0}} = M \geq u(x)$, $z|_\Gamma \geq 0 \equiv u(x)$. Тогда на основании леммы 7 $z(x) \geq u(x)$ почти всюду в D. Поэтому

$$\sup_{D \cap Q_R^{x_0}} u \leq \sup_{D \cap Q_R^{x_0}} z,$$

или

$$\sup_{D\cap Q_R^{x_0}} u \le M - \inf_{D\cap Q_R^{x_0}} U_H(x),$$

откуда

$$M \ge \inf_{D\cap Q_R^{x_0}} U_H + \sup_{D\cap Q_R^{x_0}} u. \tag{31}$$

Доопределив $U_H = M$ на H, оценим выражение $\inf\limits_{Q_R^{x_0}} U_H$ снизу. Пусть $\{U_H^j\}_{j=1}^\infty$ — аппроксимирующая последовательность для U_H, $U_H^j\big|_H = M$, $0 \le$ $\le U_H^j \le M$. Обозначим $a^j = \sup\limits_{x\in Q_{4R}^{x_0}\setminus Q_{2R}^{x_0}} U_H^j(x)$, $M = \sup\limits_{x\in Q_{4R}^{x_0}} U_H^j(x)$, $\Sigma_t^j = \{ x\in Q_{4R}^{x_0}\colon$ $U_H^j(x) > t\}$, где $t\in (0, M)$.

Во избежание дальнейшей громоздкости в обозначениях U_H^j, a^j, Σ_j^t, δ^j индекс j будем опускать. Тогда Σ_a содержится в шаре $Q_{2R}^{x_0}$. В силу леммы 9 найдутся достаточно малое $\varepsilon > 0$ и $a_1 \in (a, \min(2a, M))$ такие, что

$$\int\limits_{\partial\Sigma_{M-\varepsilon}} A(x,\nabla U_H)n\,d\sigma = \int\limits_{\partial\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)n\,d\sigma + \delta, \tag{32}$$

где, согласно лемме 8,

$$\int\limits_{\partial\Sigma_{M-\varepsilon}} A(x,\nabla U_H)n\,d\sigma \ge \frac{1}{2(M-\varepsilon)}\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{M-\varepsilon}} A(x,\nabla U_H)\nabla U_H\,dx - \frac{\delta}{2M}.$$

Согласно условию (5), первое слагаемое правой части превышает

$$\frac{1}{2(M-\varepsilon)}\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{M-\varepsilon}} \omega|\nabla U_H|^p\,dx \ge$$

$$\ge \frac{(M-\varepsilon)^{p-1}}{2}\,\overline{\mathrm{cap}}_{p\omega}\Sigma_{M-\varepsilon} \ge \frac{(M-\varepsilon)^{p-1}}{2}\,\overline{\mathrm{cap}}_{p\omega}H.$$

Следовательно, выбирая $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\dfrac{(M-\varepsilon)^{p-1}}{2} > \dfrac{M^{p-1}}{4}$, получаем

$$\int\limits_{\partial\Sigma_{M-\varepsilon}} A(x,\nabla U_H)n\,d\sigma \ge \frac{M^{p-1}}{4}\,\overline{\mathrm{cap}}_{p\omega}H - \frac{\delta}{2M} \tag{33}$$

$\Bigg($черта над $\mathrm{cap}_{p\omega}$ означает, что емкость берется относительно шара $Q_{4R}^{x_0}$: $\overline{\mathrm{cap}}_{p\omega}H = \inf\left\{\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}} |\nabla z|^p\omega\,dx)\colon \quad z\in \mathrm{Lip}_0\big(Q_{4R}^{x_0}\big),\ z \ge 1 \ \text{на} \ H\right\}\Bigg)$. Из леммы 8 следует также, что

$$\int\limits_{\partial\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)n\,d\sigma \le \frac{1}{a}\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)\nabla U_H\,dx + \frac{\delta}{a}. \tag{34}$$

Пусть φ_{a_1} — потенциал для Σ_{a_1}: $\operatorname{div}\left(\omega\left|\nabla\varphi_{a_1}\right|^{p-2}\nabla\varphi_{a_1}\right) = 0$ в $Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}$ и $\varphi_{a_1} - U_H \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}\left(Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}\right)$. Тогда согласно вариационному смыслу функции φ_{a_1} имеем

$$\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} \omega\left|\nabla\varphi_{a_1}\right|^p dx = a_1^p\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\Sigma_{a_1}$$

(см. [3]). С помощью уравнения (1), выбирая пробную функцию $\varphi = U_H - \varphi_{a_1}$, находим

$$\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)\nabla U_H\,dx =$$

$$\leq \int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)\nabla\varphi_{a_1}dx \leq \lambda \int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} \omega|\nabla U_H|^{p-1}\left|\nabla\varphi_{a_1}\right|dx \leq$$

$$\leq \lambda\left(\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} \omega|\nabla U_H|^p dx\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} \omega\left|\nabla\varphi_{a_1}\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \lambda\left(\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)\nabla U_H\,dx\right)^{1/p'}\left(\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\Sigma_{a_1}\right)^{1/p} a_1,$$

откуда в силу (5), (6)

$$\int\limits_{Q_{4R}^{x_0}\setminus\Sigma_{a_1}} A(x,\nabla U_H)\nabla U_H\,dx \leq \lambda^p a_1^p\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\Sigma_{a_1} \leq$$

$$\leq (2\lambda)^p a^p\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\Sigma_a \leq (2\lambda)^p a^p\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\,Q_{2R}^{x_0}, \tag{35}$$

так как $\Sigma_{a_1}\subset\Sigma_a\subset Q_{2R}^{x_0}$. Из (32) – (35) следует, что

$$\frac{M^{p-1}}{4}\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}H - \frac{\delta}{2M} \leq a^{p-1}(2\lambda)^p\,\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}\,Q_{2R}^{x_0} + \delta\left(\frac{1}{a}+1\right),$$

или

$$a \geq C\left(\frac{\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}H}{\overline{\overline{\operatorname{cap}}}_{p\omega}\,Q_{2R}^{x_0}}\right)^{p'-1} M - \delta,$$

где $C > 0$ не зависит от x_0, R, a, H, M. Устремив j к ∞, аналогичную оценку получим для решения $U_H(x)$ (опускаем δ_j). В силу неравенства Гарнака и леммы 3

$$\inf_{Q_R^{x_0}} U_H \geq \inf_{Q_{2R}^{x_0}} U_H \geq Ca \geq C\left(\frac{\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega}H}{\overline{\overline{\operatorname{cap}}}_{p\omega}\,Q_{2R}^{x_0}}\right)^{p'-1} M,$$

где $C > 0$ не зависит от R, x_0, H, M. Действительно, в силу леммы 3 $\inf\limits_{Q_{2R}^{x_0}} U_H$, а также $\sup\limits_{Q_{4R}^{x_0} \setminus Q_{2R}^{x_0}} U_H$ будут достигаться на поверхности сферы $S_{2R}^{x_0}$. Поскольку любые две точки на $S_{2R}^{x_0}$ можно соединить цепочкой самое большее μ_n шаров $\left\{Q_{R/2}^{x_\nu}\right\}$, где $x_\nu \in S_{2R}^{x_0}$, то, применяя в каждой $Q_{R/2}^{x_\nu}$ неравенство Гарнака, имеем

$$\sup_{Q_{4R}^{x_0} \setminus Q_{2R}^{x_0}} U_H = \sup_{S_{2R}^{x_0}} U_H \le C_5^{\mu_n} \inf_{S_{2R}^{x_0}} U_H = C_5^{\mu_n} \inf_{Q_{2R}^{x_0}} U_H,$$

где C_5 — константа из теоремы 1, т. е. $C = C_5^{-\mu_n}$ во второй оценке, приводимой выше.

Воспользуемся теперь элементарными оценками $\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega} Q_{2R}^{x_0} \le CR^{-p}\omega\left(Q_{4R}^{x_0}\right)$, $\overline{\operatorname{cap}}_{p\omega} H \ge \operatorname{cap}_{p\omega} H$. Далее, $\omega\left(Q_{4R}^{x_0}\right) \le C\omega\left(Q_R^{x_0}\right)$ в силу свойства удвоения функций $\omega \in A_p$, в итоге получаем оценку

$$\inf_{S_R^{x_0}} U_H \ge C\left(\frac{R^p \operatorname{cap}_{p\omega} H}{\omega\left(Q_R^{x_0}\right)}\right)^{p'-1} M,$$

где $C > 0$ не зависит от x_0, R, H, M. С учетом последней оценки из (31) следует утверждение леммы 10.

Лемма 10 доказана.

Обобщенное решение задачи Дирихле. Пусть f — произвольная непрерывная на ∂D функция. Построим обобщенное решение u_f задачи Дирихле для уравнения (1) в области D:

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u) = 0 \quad \text{в} \quad D, \qquad u|_{\partial D} = f. \tag{36}$$

В случае $f \in \operatorname{Lip}(\partial D)$ существует ее продолжение ϕ с ∂D на все $\overline{D}$ такое, что $\phi \in \operatorname{Lip}\left(\overline{D}\right)$. Тогда $\phi \in W_{p\omega}^1(D)$ и обобщенным решением u_f задачи (36) назовем решение задачи

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u) = 0 \quad \text{в} \quad D, \qquad u - \phi \in \overset{\circ}{W}{}_{p\omega}^1(D). \tag{37}$$

Задача (37) разрешима в силу леммы 6.

Произвольную непрерывную функцию f на ∂D аппроксимируем гладкими функциями $f_k \to f$ равномерно на ∂D, где $f_k \in \operatorname{Lip}(\partial D)$. Пусть ϕ_k — продолжение f_k на D, $\phi_k \in \operatorname{Lip}\left(\overline{D}\right)$. Обозначим через u_k решение задачи (37) для $\phi = \phi_k$. Имеем $|f_k - f_m| \le \delta_{km} \to 0$ на ∂D при $k, m \to \infty$. Тогда в силу леммы 7 $|u_k - u_m| \le \delta_{km}$ почти всюду в D. Поэтому последовательность функций $\{u_k\}$ сходится в $L^\infty(D)$ к некоторой существенно ограниченной в D функции u_f, которую будем называть обобщенным решением задачи (36). Функция u_f является решением уравнения (36) в любой строго внутренней подобласти G: $\overline{G} \subset D$. Действительно, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sup\limits_D |u_k| \le 2\max\limits_{\partial D}|f|$ и $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_{W_{p\omega}^1(D)} < \infty$, так как из уравнения (37) следует (выбираем пробную функцию $\varphi = u_k \xi^p$, где $\xi \in \operatorname{Lip}\left(\overline{D}\right)$ равна 1 на G, $\overline{G} \subset \Omega$, и нулю вне Ω, $\overline{\Omega} \subset D$)

$$\int_D A(x, \nabla u_k)\nabla u_k \xi^p dx \le \lambda p \int_D |u_k| \xi^{p-1} |\nabla u_k|^{p-1} |\nabla\xi| \omega\, dx \le$$

$$\le \lambda p \left(\int_D \omega |\nabla u_k|^p \xi^p\, dx \right)^{1/p'} \left(\int_D \omega |u_k|^p |\nabla\xi|^p\, dx \right)^{1/p},$$

или с учетом (5)

$$\int_D \omega |\nabla u_k|^p \xi^p\, dx \le C\left(G, D, \max_{\partial D} |f|, \omega\right), \tag{38}$$

откуда

$$\int_D \omega |\nabla u_k|^p\, dx \le C\left(G, D, \max_{\partial D} |f|, \omega\right).$$

Тогда $\nabla u_k \to v$ в $L_{p(\xi^p\omega)}(D)$ слабо для некоторой подпоследовательности, для которой оставляем прежнее обозначение. Из сходимости $u_k \to u_f$ в $L^\infty(D)$ следует, что $v = \nabla u_f$. Тогда $\nabla u_k \to \nabla u_f$ в $L_{p(\xi^p\omega)}(D)$ и $L_{p\omega}(G)$ слабо, $\nabla u_f \in L_{p\omega}(G)$.

Покажем, что $\nabla u_k \to \nabla u_f$ почти всюду в G для некоторой подпоследовательности. Подбирая пробную функцию $(u_k - u_f)\xi^p$, из уравнения (37) находим

$$\int_D \left[A(x, \nabla u_k) - A(x, \nabla u_f)\right]\left(\nabla u_k - \nabla u_f\right)\xi^p\, dx \le$$

$$\le p \int_D |A(x, \nabla u_k)| \left|u_k - u_f\right| \xi^{p-1} |\nabla\xi| dx - I_k \le$$

$$\le p\lambda \sup_\Omega \left|u_k - u_f\right| \left(\int_D \xi^p |\nabla u_k|^p \omega\, dx \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega \omega |\nabla\xi|^p dx \right)^{1/p} - I_k, \tag{39}$$

$$I_k = \int_D \frac{1}{\omega} A(x, \nabla u_f)(\nabla u_k - \nabla u_f)\xi^p \omega\, dx \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тогда с учетом (38), слабой сходимости $\nabla u_k \to \nabla u_f$ в $L_{p(\xi^p\omega)}(D)$ и $\sup_\Omega |u_k - u_f| \to 0$ получаем $\int_G F_k\, dx = \delta_k \to 0$, где

$$F_k = \left[A(x, \nabla u_k) - A(x, \nabla u_f)\right]\left(\nabla u_k - \nabla u_f\right).$$

Из этого вытекает, что $F_k \to 0$ по мере в G. Тогда для некоторой подпоследовательности, для которой оставляем прежнее обозначение, $F_k \to 0$ почти всюду в G. Отсюда следует, что $\nabla u_k \to \nabla u_f$ почти всюду в G в силу условия (22): пусть $\nabla u_k \to g$ в точке $x \in G$, где $F_k(x) \to 0$, тогда из (5) вытекает, что $|g|$ конечен, а из (22) следует, что $g = \nabla u_f(x)$. Тогда $\omega^{-1/p} A(x, \nabla u_k) \to \omega^{-1/p} A(x, \nabla u_f)$ почти всюду в G вследствие непрерывности функций $\{A^j(x, \eta): j = 1, 2, \ldots, n\}$ по η. Но $\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| A(x, \nabla u_k)\omega^{-1/p} \right\|_{L_{p'}(G)} \le \lambda \| \nabla u_k \|_{L_{p\omega}(G)}^{p-1} < \infty$. По теореме Лионса [18, с. 25], $A(x, \nabla u_k)\omega^{-1/p} \to \omega^{-1/p} A(x, \nabla u_f)$ в $L_{p'}(G)$ слабо, так что

$$0 = \int_G A(x, \nabla u_k) \nabla\varphi\, dx \;\to\; \int_G A(x, \nabla u_f) \nabla\varphi\, dx \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(G),$$

т. е. u_f является решением уравнения (36) в G.

Определение. *Точка* $x_0 \in \partial D$ *называется регулярной для уравнения* (36), *если для любой непрерывной на* ∂D *функции* f

$$\lim_{x \to x_0} u_f(x) = f(x_0). \tag{40}$$

Теорема 3. *Пусть при* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p$ *выполняются условия* (5) – (7) *и* (22) *для уравнения* (36). *Тогда для регулярности граничной точки* x_0 *достаточно, чтобы*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-mp} \operatorname{cap}_{p\omega} H_m}{\omega\left(Q^{x_0}_{4^{-m}}\right)} \right)^{p'-1} = \infty, \tag{41}$$

где $H_m = Q^{x_0}_{4^{-m}} \setminus D$, $\operatorname{cap}_{p\omega} H_m$ *— его нелинейная весовая емкость* (29).

Доказательство проводится аналогично [6, с. 151]. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ при $|x - x_0| < \delta_1$, $x \in \partial D$. Кроме того, найдется $f_k \in \operatorname{Lip}(\partial D)$, для которой $|f_k - f| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ для всех $x \in \partial D$. Пусть u_k — решение задачи $\operatorname{div} A(x, \nabla u_k) = 0$ в D, $u_k - \phi_k \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$, где $\phi_k \in \operatorname{Lip}\left(\overline{D}\right)$ — продолжение f_k с ∂D на всю $\overline{D}$. Функция $z = u_k - f(x_0) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ есть решение задачи $\operatorname{div} A(x, \nabla z) = 0$ в D, $z - \phi_k + f(x_0) + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p\omega}(D)$. Тогда для любого $x \in Q^{x_0}_{\delta_1} \cap \partial D$ имеем $z < 0$. Функция z непрерывна в D. Обозначим $D' = \{ x \in D \colon z(x) > 0 \}$. Пусть m_0 — такое натуральное число, что $4^{-m_0} < \delta_1$. Применяя к шарам $Q^{x_0}_{4^{-m}}$, $Q^{x_0}_{4^{-(m+1)}}$ и подобласти D' для $m = m_0$, $m_0 + 1, \ldots, l$, многократно лемму 10, получаем

$$\sup_{Q^{x_0}_{4^{-l}} \cap D} z \le 3 \max_{\partial D} |f| \exp\left\{ -\gamma \sum_{m=m_0}^{l} \left(\frac{\operatorname{cap}_{p\omega} H_m}{\omega(Q^{x_0}_{4^{-m}})} 4^{-mp} \right)^{p'-1} \right\}.$$

Из этой оценки и аналогичной для функций $z_1 = f(x_0) - \dfrac{\varepsilon}{2} - u_k$ имеем

$$\sup_{Q^{x_0}_{4^{-l}} \cap D} \left| u_f(x) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + L \exp\left\{ -\gamma \sum_{m=m_0}^{l} \left(\frac{4^{-mp} \operatorname{cap}_{p\omega} H_m}{\omega\left(Q^{x_0}_{4^{-m}}\right)} \right)^{p'-1} \right\}, \tag{42}$$

где $L > 0$ зависит от $n, p, \lambda, A_p, \max\limits_{\partial D} |f|$ (подробнее см. [6, с. 151]). Отсюда, выбирая $l(\varepsilon) \in N$ так, чтобы второе слагаемое (42) было меньше $\varepsilon/2$ при $l \ge l(\varepsilon)$, получаем $\left| u_f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \in D$, где $\delta = 4^{-l(\varepsilon)}$.

Из доказательства теоремы 3 видно, что в регулярной граничной точке можно оценить модуль непрерывности функций $u_f(x)$ в зависимости от модуля непрерывности граничной функции f и скорости расходимости ряда (41). Пусть $|f(x) - f(x_0)| \le \theta(|x - x_0|)$, где θ $(\theta(0) = 0,\ \theta' > 0,\ \theta'' \le 0)$ — модуль непрерывности граничной функции. Тогда

$$\left|u_f(x) - f(x_0)\right| \le 2\theta(\delta) + 3\max_{\partial D}|f|\exp\left\{-\gamma \int\limits_{|x-x_0|}^{\delta} \left(\frac{\tau^p \operatorname{cap}_{p\omega} H_\tau}{\omega\left(Q_\tau^{x_0}\right)} \right)^{p'-1} \frac{d\tau}{\tau} \right\}$$

$$\text{при} \quad |x - x_0| < \delta, \quad x \in \overline{D},$$

где $\delta > 0$, $\gamma > 0$ зависят от n, p, λ, A_p; $H_\tau = Q_\tau^{x_0} \setminus D$; $\operatorname{cap}_{p\omega} H_\tau$ — нелинейная весовая емкость H_τ (29).

1. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for equations with discontinuous coefficients // Ann. sci. norm. super. Pisa. Cl. Sci. – 1963. – **17**. – P. 43 – 77 (Сб. пер. „Математика". – 1965. – **9**, № 2. – С. 72 – 97).
2. *Fabes E. B., Kenig C. E., Serapioni R. P.* The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Communs Part. Different. Equat. – 1982. – **7**. – P. 77 – 116.
3. *Fabes E. B., Jerison D., Kenig C.* The Wiener test for degenerate elliptic equations // Ann. Inst. Forier (Grenoble). – 1982. – **32**. – P. 151 – 182.
4. *Chanillo S., Wheeden R. L.* Harnack's inequality and mean-value inequalities for solutions of degenerated elliptic equations // Communs Part. Different. Equat. – 1986. – **11(10)**. – P. 1111 – 1134.
5. *Garieppy R., Ziemer W. P.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1977. – **67**. – P. 25 – 39.
6. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1988. – **32**. – С. 99 – 217.
7. *Maz'ya V. G.* On Wiener's type regularity of a boundary points for higher order elliptic equations // Nonlinear Anal. Function Spaces and Appl. / Eds M. Krbec, A. Kufner (Proc. Spring School Held in Prague, May 31 – June 6, 1988). – 1988. – **6**. – P. 119 – 155.
8. *Maly J., Ziemer W. P.* Regularity of solutions of elliptic partial differential equations // Math. Surv. and Monogr. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. – **51**.
9. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
10. *Kufner A.* Weighted Sobolev spaces. – Leipzig: Feubner, 1980.
11. *Kilpelainen T.* Smooth approximation in weighted Sobolev spaces // Comment math. Univ. carol. – 1997. – **38**. – P. 29 – 35.
12. *Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F.* Approximation and embedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields // Boll. Unione mat. ital. – 1997. – **7**, № 11-B. – P. 83 – 117.
13. *Sawyer E. T., Wheeden R. L.* Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces // Amer. J. Math. – 1992. – **114**. – P. 813 – 874.
14. *Mamedov F. I.* On two weighted Sobolev inequalities in unbounded domains // Proc. A. Razmadze Math. Inst. Georgian Acad. Sci / Ed. V. M. Kokilashvili. – 1999. – **21**. – P. 117 – 123.
15. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1967. – 574 с.
16. *Ландис Е. М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 1. – С. 3 – 62.
17. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 585 с.
19. *Drabek P., Kufner A., Nicolosi F.* Nonlinear elliptic equations (singular and degenerated case). – Univg West Bohemia in Pilshen, 1996. – 211 p.
20. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Получено 26.04.06,
после доработки — 28.08.07