УДК 517.54

Р. В. Подвысоцкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ ЧАСТИЧНО НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

We present new results on the maximization of products of positive powers of inner radii of some special domain systems in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ with respect to points of finite sets such that any two distinct points z_1, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ of such set belong to different rays emerging from the origin.

Наведено нові результати про максимізацію додатних степенів внутрішніх радіусів деяких спеціальних систем областей у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ відносно точок скінченних множин таких, що дві будь-які різні точки z_1, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ множини лежать з початку координат.

В теории однолистных функций экстремальные задачи о произведении внутренних радиусов областей составляют активно развивающееся направление. Возникновение этого направления связано с классической работой М. А. Лаврентьева [1], в которой была впервые поставлена и решена задача о произведении комфортных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. Впоследствии эта тематика развивалась в работах многих авторов (см., например, [2 – 7]).

В данной работе рассматриваются задачи подобного типа для частично неналегающих областей.

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел, $\mathbb{R}^+ = (0;\infty)$, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [2, 5]. В данной работе используется теория квадратичных дифференциалов, с которой можно ознакомиться в монографии [2]. Систему точек A_n: $\{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $k = \overline{1, n}$, такую, что $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, будем называть лучевой системой точек. Обозначим

$$P_k(A_n) \ := \ \left\{w\colon \arg a_k < \arg a_w < \arg a_{k+1}\right\},$$
$$\sigma_k \ := \ \frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - \arg a_k), \quad k = \overline{1, n},$$

Ясно, что $\sum_{k=1}^n \sigma_k = 2$. Рассмотрим произвольную лучевую систему точек A_n: $\{a_k\}_{k=1}^n$. Пусть $\{B_k\}_{k=0}^n$ — любой набор областей таких, что $0 \in B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$.Тогда обозначим через $B_k^{(1)}$ связную компоненту множества $B_k \bigcap \overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку a_k, а через $B_k^{(2)}$ связную компоненту множества $B_k \bigcap \overline{P_{k-1}(A_n)}$, содержащую точку a_k, $k = \overline{1, n}$, $\overline{P_0(A_n)}$: $\overline{P_n(A_n)}$. $B_k^{(0)}$ обозначает связную компоненту множества $B_0 \bigcap \overline{P_k(A_n)}$, $k = \overline{1, n}$, содержащую точку $w = 0$. Пусть D — произвольное открытое множество, $D = A_n \bigcup \{0\}$.

Если связные компоненты $[D \bigcap P_k]$, $k = \overline{1, n}$, относительно точек 0, a_k, a_{k+1} взаимно не пересекаются при $k = \overline{1, n}$, то множество D удовлетворяет условию неналегания относительно лучевой системы точек A_n. Система $\{B_k\}_{k=0}^n$ удовлетворяет условию неналегания, если открытое множество $D =$

$= \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ удовлетворяет условию неналегания относительно лучевой системы точек $A_n \cup \{0\}$.

Для произвольной лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ положим

$$\mu_\alpha(A_n) \;:=\; \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)\right]^{1-\frac{\alpha\sigma_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\alpha(\sigma_k+\sigma_{k-1})},$$

где $a_{n+1} := a_1$, $\sigma_0 := \sigma_n$, $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$. Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционалов вида $J_\alpha = r^{\alpha}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — лучевая система точек, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — набор областей, удовлетворяющих условию неналегания относительно лучевой системы точек A_n. Подобные задачи рассматриваются в работах [2 – 4].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть даны числа* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *и* α, $0 < \alpha \leq 0{,}2$. *Тогда для произвольной лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что* $\mu_\alpha(A_n) = 1$, *и любого набора областей* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, *удовлетворяющего условию неналегания относительно лучевой системы точек* A_n, *выполняется неравенство*

$$r^{\alpha}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\text{т} \;\leq\; \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\frac{2^{n}(4\alpha)^{\frac{\alpha}{n}}\, n^{2n}}{\left(n^2-\alpha\right)^{n+\frac{\alpha}{n}}}\left(\frac{n-\sqrt{\alpha}}{n+\sqrt{\alpha}}\right)^{2\sqrt{\alpha}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда, когда a_k, $k = \overline{1,n}$, *и* B_s, $s = \overline{0,n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 \;=\; -\frac{\left(n^2-\alpha\right)w^n + \alpha}{w^2\left(w^n-1\right)^2}\,dw^2. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. *Тогда для любого* $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, $0 < \alpha \leq \frac{7}{16}n^2$, *любой лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что* $\mu_\alpha(A_n) = 1$, $\sigma_k \leq \sqrt{\frac{1.75}{\alpha}}$, $k = \overline{1,n}$, *и любого набора областей* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, *удовлетворяющего условию неналегания относительно лучевой системы точек* A_n, *выполняется неравенство*

$$r^{\alpha}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \;\leq\; r^{\alpha}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k^0\right),$$

где a_k^0, $k = \overline{1,n}$, и D_s, $s = \overline{0,n}$, *— соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала* (1).

***Доказательство теоремы* 1** базируется на методе разделяющего преобразования (см. [5, 6]). Рассмотрим открытое множество $D = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup B_0$. Для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^{+}$ образуем множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D; \quad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \le t\},$$

$$E_k(t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_k| \le t\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим конденсатор $C(t, D, A_n) = \{E_0, \overline{U}_t, E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$. Введем класс функций $\Pi_\alpha(c)$ всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\alpha}$, $G|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1, n}$. Емкостью конденсатора $C(t, D, A_n)$ называется величина (см. [5]) $\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \inf \iint \left[(C'_x)^2 + \left(C'_y\right)^2 \right] dxdy$, где нижняя грань берется по множеству. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ определяется выражением $|C(t, D, A_n)| = [\operatorname{cap} C(t, D, A_n)]^{-1}$. Определяем асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_n)$ (см. [6])

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n + \alpha} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \quad t \to 0, \tag{2}$$

где

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(n+\alpha)^2} \log \frac{1}{t} \left[\alpha \log r(D, 0) + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\alpha} g_D(0, a_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \sum_{k \ne p} g_D(a_p, a_k) \right], \tag{3}$$

$g_B(z, a)$ — обобщенная функция Грина открытого множества B относительно точки $a \in B$, $B(a)$ — связная компонента множества B, содержащая точку a, при этом $g_B(z, a) = g_{B(a)}(z, a)$, если $z \in B(a)$, и $g_B(z, a) = 0$, если $z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash B$, $g_{B(a)}(z, a)$ — функция Грина области $B(a)$ относительно точки $a \in B(a)$. Рассмотрим разделяющее преобразование (см. [5]) конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейств углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, где $z_k(w) = (-1)^k i \left(e^{-i \arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}$, $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим конденсаторы $C_k(t, D, A_n) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\right)$, где

$$E_0^{(k)} = z_k\left(E_0 \cap \overline{P}_k\right) \cup \left\{z_k\left(E_0 \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$

$$U_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k\right) \cup \left\{z_k\left(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*,$$

$$E_1^{(k)} = z_k\left(E_k(t) \cap \overline{P}_k\right) \cup \left\{z_k\left(E_k(t) \cap \overline{P}_k\right)\right\}^*, \quad k = \overline{1, n}, \qquad E_{n+1}(t) = E_1(t),$$

$$\{A\}^* = \left\{w \in \overline{\mathbb{C}} : -\overline{w} \in A\right\}^*.$$

Каждому конденсатору $C_k(t, D, A_n)$ сопоставим класс V_k всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G|_{\overline{U}_t^{(k)}} = \sqrt{\alpha}$, $G|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t, D, A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t, D, A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу результатов работ [5, 6] выполняется неравенство $\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{cap} C(t, D, A_n)$. Отсюда непосредственно получаем соотношение

$$|C(t, D, A_n)| \leq 2\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Справедливы следующие асимптотические представления:

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\sigma_k}|a_m|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}|w - a_m|, \quad w \to a_m, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$m = k, k+1, \quad z_k(w) \sim |w|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad w \to 0. \tag{5}$$

Используя (2), (3) и (5), получаем асимптотические равенства

$$|C_k(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2 + \alpha\sigma_k}\log\frac{1}{t} + M_k(D, A_n) + o(1), \quad t \to 0, \tag{6}$$

где

$$M_k(D, A_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(2 + \alpha\sigma_k)^2}\left[\sigma_k^2\,\alpha\log r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) + \log\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, w_k^{(1)}\right)r\left(\Omega_k^{(2)}, w_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\sigma_k}|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}\frac{1}{\sigma_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\right], \tag{7}$$

$z_k(a_k) := w_k^{(1)}$, $z_k(a_{k+1}) := w_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $z_n(a_{n+1}) := w_n^{(2)}$, а $\Omega_k^{(0)}$, $\Omega_k^{(s)}$ — объединение связных компоненты множеств $z_k\left(D \cap \overline{P}_k\right)$, содержащих точки 0 и $w_k^{(s)}$, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$, соответственно с их симметричным отображением относительно мнимой оси. С учетом (6) приходим к соотношению

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi(n + \alpha)}\log\frac{1}{t} + \frac{1}{4(n - \alpha)^2}\sum_{k=1}^{n}(2 + \alpha\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o(1). \tag{8}$$

Из соотношений (2), (4) и (8) имеем

$$M_k(D, A_n) \leq \frac{1}{2(n + \alpha)^2}\sum_{k=1}^{n}(2 + \alpha\sigma_k)^2 M_k(D, A_n). \tag{9}$$

Используя метод работы [4], получаем оценку исследуемого функционала

$$J_\alpha = r^\alpha(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq$$

$$\leq \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\mu_\alpha(A_n)\prod_{k=1}^{n}\left\{r^{\alpha\sigma_k^2}\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(1)}, -i\right) r\left(G_k^{(2)}, -i\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

В результате проведенных вычислений исходная задача об оценке величины J_α сведена к оценке сверху для функционала $I_3(\beta) = r^{\beta^2}(B_0, 0)\,r(B_1, 0)\,r(B_2, -i)$ на классе троек попарно непересекающихся областей $\{B_0, B_1, B_2\}$ таких, что $0 \in B_0$, $i \in B_1$, $-i \in B_2$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, 1, 2$. Известно [5, 4], что $I_3(\beta) \leq$ $\leq \psi(\beta) = 2^{\beta^2+6}\beta^{\beta^2}(2 - \beta)^{-\frac{1}{2}(2-\beta)^2}(2 + \beta)^{-\frac{1}{2}(2+\beta)^2}$, $b \in [0, 2]$. Функционал $\log\psi(\beta)$ выпукла вверх на отрезке $(0, \sqrt{0,8})$. Отсюда

$$r^{\alpha}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le$$

$$\le \left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\mu_{\alpha}(A_n)\left[\psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}, \quad t_k = \sqrt{\alpha}\,\sigma_k, \quad 0 \le t_k \le \sqrt{0,8}. \tag{11}$$

Тогда с учетом $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k = 2$ убеждаемся, что неравенства (11) выполняются при $\alpha \le \frac{0,8}{4} = 0{,}2$.

Из работ [4, 5] получаем, что знак равенства в неравенстве (10) достигается, когда точки a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (1).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Нетрудно показать, что функция $\ln \beta^2\,\psi(\beta)$ выпукла вверх на отрезке $(0, \sqrt{1,75})$. Тогда из (10) с учетом [4] получаем неравенство

$$r^{\alpha}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le \mu_{\alpha}(A_n)\,\alpha^{-\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n} t_k^2\psi(t_k)\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \alpha^{-\frac{n}{2}}\mu_{\alpha}(A_n)\left[\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)^2\psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}$$

где $t_k = \sqrt{\alpha}\,\sigma_k$, $0 \le t_k \le \sqrt{1,75}$.

Ясно также, что

$$r^{\alpha}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k^0\right) = \alpha^{-\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)^2\psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следует отметить, что теорема 1 обобщает соответствующую теорему из работы [4] на случай частично неналегающих областей, а также усиливает и обобщает теорему 4 из работы [5], а теорема 2 обобщает соответствующую теорему из работы [4].

1. *Лаврентьев М. А.* К теории комформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5** – С. 159 – 245.
2. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
4. *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 273 – 281.
5. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленинг. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.
7. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України – 2006. – № 10. – С. 7 – 13.

Получено 03.11.06