УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. І. Філіпчук
(Черн. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ K_hC-ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРОСТОРАХ МУРА

We introduce a notion of a categorical cliquish mapping and prove that, for each $K_h C$-mapping $f: X \times \times Y \to Z$ (here, X is a topological space, Y is a first countable space, and Z is a Moore space) with categorical cliquish horizontal y-sections f_y, the sets $C_y(f)$ are residual G_δ-sets in X for each $y \in Y$.

Введено понятие категорно кликового отображения и доказано, что для каждого $K_h C$-отображения $f: X \times Y \to Z$ (где X — топологическое пространство, Y — пространство с первой аксиомой счетности, Z — пространство Мура) с категорно кликовыми горизонтальными y-разрезами f_y множества $C_y(f)$ для каждого $y \in Y$ являются остаточными множествами типа G_δ в X.

1. Впродовж останніх п'ятнадцяти років активізувалось вивчення множини $C(f)$ точок неперервності нарізно неперервних функцій $f: X \times Y \to Z$ та їх аналогів, які набувають значень в топологічних просторах, близьких до метризовних [1 – 11]. В працях [1 – 9] розглядалися функції зі значеннями в σ-метризовних чи сильно σ-метризовних просторах, а в [10, 11] — функції зі значеннями в просторах Мура. Просто навести приклад сильно σ-метризовного простору, який не є простором Мура: таким буде, наприклад, простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел з відповідною топологією індуктивної границі [12, с. 48]. Природно постає питання: чи існує простір Мура, який не є сильно σ-метризовним? Тут ми показуємо, що прикладом такого простору служить площина Немицького. Проте залишається неясним, чи існує простір Мура, який не є σ-метризовним.

У [10] і [11] розглядались KC-функції і $K\tilde{C}$-функції, тобто функції, що квазінеперервні відносно першої змінної, а їх x-розрізи є неперервними для всіх x чи, відповідно, коли x пробігає залишкову в X множину. Зокрема, в [10] З. Пьотровський подав наступний результат: *якщо X — берівський простір, Y — простір з першою аксіомою зліченності, Z — простір Мура і $f \in \in K\tilde{C}(X \times Y, Z)$, то для кожного $y \in Y$ множина*

$$C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$$

є всюди щільною типу G_δ в X. Ми тут переформулювали результат Пьотровського, помінявши місцями простори X, Y та відповідні умови на них, оскільки для нас зручніше працювати з горизонталями, а не з вертикалями. Зауважимо, що в [10] цей результат було сформульовано з помилкою (там на простір Z накладалася лише умова регулярності), а в [11] він був сформульований відповідним чином для KC-функцій, але не доведений (вказано лише, з яких результатів ця теорема випливає).

Оскільки площина Немицького є простором Мура, то один із результатів праці [9] про наявність точок неперервності нарізно неперервних функцій на горизонталях випливає з вищевказаного результату Пьотровського. Між тим, у працях [4, 8] розглядався дещо загальніший клас K_hC-функцій, тобто функцій, які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної. Тому виникла необхідність з'ясувати, чи переноситься результат Пьотровського на випадок K_hC-функцій (або навіть $K_h\tilde{C}$-функцій) зі значеннями в просторах Мура. Тут ми наводимо контрприклад, який показує, що таке перенесення неможливе. Разом з тим, в статті вводиться нове поняття, яке є послабленням понять квазінеперервності і кліковості, і назване нами категорною кліковістю (див. п. 7.). З допомогою цього поняття ми отримуємо основний результат (теорема 4), де теорема Пьотровського переноситься на $K_h\tilde{C}$-функції з категорно кліковими горизонтальними розрізами. Крім того, в п. 10 ми наводимо приклад, який показує, що основна теорема, отримана нами, є сильнішою від згаданого результату Пьотровського.

2. Для відображення $f: X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. При цьому відображення $f^x: Y \to Z$ ми називаємо *вертикальним x-розрізом*, а $f_y: X \to Z$ — *горизонтальним y-розрізом* відображення f.

Нехай X, Y, Z — топологічні простори і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Відображення $f: X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* p_0, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і для довільних околів U і V точок x_0 і y_0 в X та Y відповідно існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Відповідно f — *горизонтально квазінеперервне,* якщо воно є таким у кожній точці $p = (x, y) \in X \times Y$. Символом $K_hC(X \times Y, Z)$ ми позначаємо клас всіх горизонтально квазінеперервних відображень $f: X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної.

Поряд з класом $K_hC(X \times Y, Z)$ ми розглядатимемо ширший клас $K_h\tilde{C}(X \times \times Y, Z)$, що складається з горизонтально квазінеперервних відображень $f: X \times \times Y \to Z$, для яких множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x \in C(Y, Z)\}$ є залишковою в X, тобто такою, що її доповнення в X є множиною першої категорії. Тут $C(Y, Z)$ означає множину всіх неперервних відображень $g: Y \to Z$.

Ми будемо використовувати таку властивість горизонтально квазінеперервних відображень [4, лема 2].

Лема 1. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f: X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, U і V — відкриті множини відповідно в X і Y, $A \subseteq X$ і $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Легко перевірити, що властивість горизонтальної квазінеперервності відображення $f: X \times Y \to Z$ зберігається і для його звуження $f_0 = f|_{X_0 \times Y}: X_0 \times Y \to \to Z$ у тому випадку, коли X_0 — відкритий або всюди щільний підпростір простору X. Крім того, якщо $f \in K_h\tilde{C}(X \times Y, Z)$ і множина X_0 відкрита в X, то і $f_0 = f|_{X_0 \times Y} \in K_h\tilde{C}(X_0 \times Y, Z)$.

3. Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — системи множин в топологічному просторі Z і $z \in Z$. *Зіркою точки z відносно системи $\mathcal{A}$* називається множина

$$\operatorname{st}(z, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \in \mathcal{A} : z \in A\}.$$

Кажуть, що *множина A вписана в систему $\mathcal{B}$* (позначається $A \preceq \mathcal{B}$), якщо існує такий елемент B системи $\mathcal{B}$, що $A \subseteq B$. Відповідно, *система $\mathcal{A}$ вписана в систему $\mathcal{B}$* (позначається $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$), якщо кожна множина A системи $\mathcal{A}$ вписана в систему $\mathcal{B}$.

Легко перевірити, що з умови $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ випливає, що $\operatorname{st}(z, \mathcal{A}) \subseteq \operatorname{st}(z, \mathcal{B})$ для кожного $z \in Z$.

Нам буде потрібна така властивість відкритих покриттів регулярного простору:

Лема 2. *Нехай $\mathcal{W}$ — відкрите покриття регулярного простору Z. Тоді існує таке відкрите покриття $\mathcal{W}_0$ простору Z, що $\overline{\mathcal{W}_0} = \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_0\} \preceq \mathcal{W}$.*

Доведення. Нехай $z \in Z$. Тоді, оскільки $\mathcal{W}$ — покриття простору Z, існує така відкрита множина $W \in \mathcal{W}$, що $z \in W$. В регулярному просторі Z замкнені околи утворюють базу будь-якої точки. Зокрема, існує така відкрита множина W_z, що

$$z \in W_z \quad \text{і} \quad \overline{W_z} \subseteq W.$$

Покладаючи далі

$$\mathcal{W}_0 = \{ W_z : z \in Z\},$$

отримуємо шукане покриття. Справді, очевидно, що $\mathcal{W}_0$ — відкрите покриття простору Z, причому $\overline{\mathcal{W}_0} \preceq \mathcal{W}$.

4. Нехай $(\mathcal{W}_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність відкритих покриттів простору Z. Ця послідовність називається *розвиненням простору* Z, якщо для довільної точки $z \in Z$ система $\{ \operatorname{st}(z, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N} \}$ утворює базу околів точки z в Z. Регулярний простір, який має розвинення, називається *простором Мура* [10; 13, с. 426]. Зрозуміло, що простір з розвиненням задовольняє першу аксіому зліченності.

Легко перевірити, що кожен метризовний простір є простором Мура, але існують і неметризовні простори Мура. Прикладом такого простору є площина Немицького [14], яку ми позначаємо символом $\mathbb{P}$.

Нагадаємо [15, с. 47], що топологічна структура на площині Немицького $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$, де $\mathbb{P}_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ і $\mathbb{P}_2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, вводиться таким чином: базою околів точки $p = (x, y) \in \mathbb{P}_2$ служать круги $K(p, r) = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u - x)^2 + (v - y)^2 < r^2 \}$ з $0 < r < y$, а точки $p = (x, 0) \in \mathbb{P}_1$ — множини $K(p_r, r) \cup \{p\}$, де $p_r = (x, r)$ і $0 < r < +\infty$. Якщо для кожного номера n покласти

$$\mathcal{W}_n' = \left\{ K\left(\left(x, \frac{1}{n} \right), \frac{1}{n} \right) \cup \{(x, 0)\} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{W}_n'' = \left\{ K\left((x, y), \frac{1}{n} \right) : x \in \mathbb{R},\ y \geq \frac{2}{n} \right\}$$

і $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n' \cup \mathcal{W}_n''$, то ми отримаємо розвинення $(\mathcal{W}_n)_{n=1}^{\infty}$ простору $\mathbb{P}$. Добре відомо [15, с, 74], що $\mathbb{P}$ є цілком регулярним, а значить, і регулярним простором. Отже, площина Немицького є простором Мура. Крім того, у [7, п. 4] було показано, що площина Немицького є σ-метризовним, але не сильно σ-метризовним простором. Таким чином, площина Немицького $\mathbb{P}$ є σ-метризовним простором Мура, який не є сильно σ-метризовним.

5. Добре відомо, що для кожного відображення f зі значеннями у метризовному просторі $C(f)$ є множиною типу G_δ. Це переноситься і на відображення зі значеннями у просторах з розвиненням.

Твердження 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — простір з розвиненням і $f : X \to Y$ — відображення. Тоді $C(f)$ є G_δ-множиною в X.*

Доведення. Нехай $(\mathcal{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ — розвинення простору Y. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$G_n = \{ x \in X : (\exists\, U \text{ — окіл точки } x \text{ в } X)(f(U) \preceq \mathcal{V}_n) \}.$$

Очевидно, що множини G_n є відкритими в X. Покажемо, що

$$C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n .$$

Нехай $x \in C(f)$ і $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mathcal{V}_n$ — покриття простору Y і $f(x) \in Y$, то існує множина $V \in \mathcal{V}_n$ така, що $f(x) \in V$. Функція f є неперервною в точці x. Значить, існує такий окіл U точки x в X, що $f(U) \subseteq V$. Таким чином, $f(U) \preceq \mathcal{V}_n$, а отже, $x \in G_n$. Оскільки номер n був взятий довільно, то $x \in G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Встановимо обернене включення. Нехай $x \in G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $y = f(x)$. Покладемо $W_n(y) = \mathrm{st}(y, \mathcal{V}_n)$. Тоді $\{ W_n(y) : n \in \mathbb{N} \}$ — база околів точки y в Y. Оскільки $x \in G_n$, то існує такий окіл U точки x в X, що $f(U) \preceq \mathcal{V}_n$. Тобто існує така множина $V_n \in \mathcal{V}_n$, що $f(U) \subseteq V_n$. Значить, $y = f(x) \in V_n$, бо $x \in U$. Таким чином маємо, що $y \in V_n \subseteq \mathrm{st}(y, \mathcal{V}_n) = W_n(y)$, тобто $V_n \subseteq W_n(y)$. Далі, враховуючи, що $f(U) \subseteq V_n$, отримуємо, що $f(U) \subseteq W_n(y)$. Отже, $x \in C(f)$, бо околи $W_n(y)$ утворюють локальну базу в точці y простору Y.

Таким чином, рівність доведено. Оскільки всі множини G_n є відкритими в X, то з доведеної рівності випливає, що $C(f)$ є G_δ-множиною в X.

***Наслідок* 1.** *Нехай X, Y — топологічні простори, Z — простір з розвиненням, $y \in Y$ і $f: X \times Y \to Z$ — відображення. Тоді $C_y(f)$ є G_δ-множиною в X.*

Доведення. Зауважимо, що $C_y(f) = \mathrm{pr}_X\big(C(f) \cap (X \times \{y\})\big)$. Позначимо $E = C(f) \cap (X \times \{y\})$. З твердження 1 випливає, що $C(f)$ є множиною типу G_δ в $X \times Y$. Тоді E — G_δ-множина в $X \times \{y\}$. Очевидно, що відображення проектування $h: X \times \{y\} \to X$, що діє за правилом $h(x, y) = x$, є гомеоморфізмом. Враховуючи, що при гомеоморфізмі G_δ-множина переходить у G_δ-множину, і рівність $C_y(f) = h(E)$, отримуємо, що $C_y(f)$ є G_δ-множиною в X.

6. У [4] було встановлено: *якщо X і Y — топологічні простори, причому Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z — сильно σ-метризовний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ залишкова в X.* Виявляється, що висновок цієї теореми може не справджуватись у тому випадку, коли Z є σ-метризовним простором Мура.

Теорема 1. *Нехай $I: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{P}$ — тотожне відображення верхньої півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ евклідової площини $\mathbb{R}^2$ на площину Немицького $\mathbb{P}$. Тоді*:

(i) $I \in K_hC(\mathbb{R} \times [0, +\infty), \mathbb{P})$;

(ii) $C_0(I) = \varnothing$.

Доведення. (i). Позначимо $F = \mathbb{R} \times \{0\}$, $G = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Оскільки множина G є відкритою як у добутку $P = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, так і в площині Немицького, і топології, індуковані з P і $\mathbb{P}$ на G, збігаються, то I буде сукупно неперервним у кожній точці множини G. Звідси негайно випливає, що відображення I є горизонтально квазінеперервним у кожній точці $p \in G$, і для кожного $x \in \mathbb{R}$ вертикальний розріз $I^x : [0, +\infty) \to \mathbb{P}$ є неперервним в кожній точці $y > 0$.

Нехай $p_0 = (x_0, 0) \in F$. Покажемо, що відображення I горизонтально квазінеперервне в точці p_0. Для $\varepsilon, \delta > 0$ покладемо: $W_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{P} : (u - x_0)^2 + (v - \varepsilon)^2 \le \varepsilon^2\}$, $U_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ і $V_\delta = [0, \delta]$. Зрозуміло, що $\{U_\delta : \delta > 0\}$ — база околів точки x_0 в $X = \mathbb{R}$, $\{V_\delta : \delta > 0\}$ — база околів точки 0 в $Y = [0, +\infty)$, а $\{W_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ — база околів точки p_0 в $Z = \mathbb{P}$. Нехай $W = W_\varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, $U = U_\delta$ і $V = V_\delta$ для деякого $\delta > 0$. Нам потрібно знайти такі точки $x_1 \in U$, $y_1 \in V$ та число $\delta_1 > 0$, що $\tilde{U} = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subseteq U$ і $I(\tilde{U} \times \{y_1\}) = \tilde{U} \times \{y_1\} \subseteq W$. Візьмемо $x_1 = x_0$. Оскільки $\min\{\delta, \varepsilon\} > 0$, то існує таке число y_1, що $0 < y_1 < \min\{\delta, \varepsilon\}$. Розв'язуючи нерівність

$$(u - x_0)^2 + (y_1 - \varepsilon)^2 \le \varepsilon^2,$$

ми одержимо множину розв'язків U_{δ_0}, де $\delta_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - (y_1 - \varepsilon)^2} > 0$. Покладемо далі $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Зрозуміло, що тоді $\tilde{U} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \subseteq U$ і $\tilde{U} \times \{y_1\} \subseteq W$. Останнє й означає, що відображення I горизонтально квазінеперервне в точці p_0.

Розглянемо вертикальний розріз $I^{x_0} : [0, +\infty) \to \mathbb{P}$ і доведемо, що він неперервний в точці 0. Для базисного околу $W = W_\varepsilon$ точки $I^{x_0}(0)$ в $\mathbb{P}$ розглянемо окіл $V_{2\varepsilon} = [0, 2\varepsilon]$ точки 0 в $[0, +\infty)$. Зрозуміло, що $I^{x_0}(V_{2\varepsilon}) = \{x_0\} \times [0, 2\varepsilon] \subseteq W$. Таким чином, ми показали, що $I \in K_hC(\mathbb{R} \times [0, +\infty), \mathbb{P})$.

(ii). Розглянемо довільну точку $p_0 = (x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ і покажемо, що відображення I розривне в точці p_0 за сукупністю змінних. Нехай $\delta, \varepsilon > 0$ — довільні числа, $P_\delta = U_\delta \times V_\delta$ і W_ε — відповідні базисні околи точки p_0 в P та точки $p_0 = I(p_0)$ в $\mathbb{P}$. Розглянемо множину $A = (U_\delta \times \{0\}) \setminus \{p_0\}$, тобто нижню сторону прямокутника P_δ, з якої викинута точка p_0. Зрозуміло, що ця множина A непорожня. При цьому $A \subseteq P_\delta$ і $A \cap W_\varepsilon = \varnothing$. Тому $I(P_\delta) = P_\delta \not\subseteq W_\varepsilon$. Це й доводить, що відображення I розривне в точці p_0.

7. Нагадаємо, що відображення f топологічного простору X у метричний простір Y є *кліковим в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G) < \varepsilon$, де $\omega_f(G)$ — коливання функції f на множині G.

Ми зараз введемо певний аналог кліковості для відображень $f : X \to Y$ зі значеннями в топологічному просторі Y. А саме, відображення f назвемо *покриттєво кліковим,* якщо для довільного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної відкритої в X непорожньої множини U існує відкрита в X непорожня множина G така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \preceq \mathcal{V}$. Зрозуміло, що кожне покриттєво клікове відображення зі значеннями у метризовному просторі є кліковим. З допомогою теореми Лебега про покриття [15, c .409] можна показати, що у випадку, коли Y є метричним компактом, поняття кліковості та покриттєвої кліковості збігаються. У загальному випадку можна навести приклад функції, яка є кліковою, але не покриттєво кліковою.

Відображення f ми назвемо *категорно кліковим,* якщо для довільного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної відкритої в X множини другої категорії U існує множина A другої категорії в X така, що $A \subseteq U$ і $f(A) \preceq \mathcal{V}$.

Подібно до властивості горизонтальної квазінеперервності, властивість категорної кліковості зберігається при переході до звужень на відкриті або всюди щільні і залишкові множини.

Лема 3. *Нехай X і Y — топологічні простори, X_0 — відкритий або всюди щільний залишковий підпростір X і $g: X \to Y$ — категорно клікове відображення. Тоді звуження $g_0 = g|_{X_0}: X_0 \to Y$ є також категорно кліковим.*

Доведення. Для відкритого підпростору X_0 твердження легко випливає з означення. Доведемо його для всюди щільного залишкового підпростору X_0.

Нехай $\mathcal{V}$ — відкрите покриття Y і U_0 — відкрита множина другої категорії в X_0. Нам потрібно знайти таку множину A_0 другої категорії в X_0, що $A_0 \subseteq U_0$ і $g_0(A_0) \preceq \mathcal{V}$. Оскільки множина U_0 відкрита в X_0, то існує така відкрита в X множина U, що $U_0 = U \bigcap X_0$. Зауважимо, що множина $U \setminus U_0$ першої категорії в X, бо $U \setminus U_0 \subseteq X \setminus X_0$, а підпростір X_0 є залишковою в X множиною. Крім того, легко перевірити, що U є множиною другої категорії в X. За умовою відображення g є категорно кліковим. Тому для знайденої множини U існує множина A другої категорії в X, така, що $A \subseteq U$ і $g(A) \preceq \mathcal{V}$. Доведемо, що $A_0 = A \bigcap U_0$ — множина другої категорії в X_0. Маємо $A = A_0 \bigcup (A \setminus U_0) \subseteq A_0 \bigcup (U \setminus U_0)$. Якби A_0 була множиною першої категорії в X_0, а значить, і в X, то й A була б множиною першої категорії в X, адже $U \setminus U_0$ і A_0 — множини першої категорії в X. Але ж за умовою A — множина другої категорії в X. Таким чином, A_0 є множиною другої категорії в X_0. Крім того, $g_0(A_0) = g(A_0) \subseteq g(A) \preceq \mathcal{V}$. Отже, $g_0(A_0) \preceq \mathcal{V}$. Це й доводить категорну кліковість відображення g_0.

8. Використовуючи категорну кліковість, ми можемо перенести результат Пьотровського на $K_h\tilde{C}$-функції. Почнемо з простішого випадку K_hC-функцій.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, y_0 — точка простору Y така, що в Y існує зліченна база околів точки y_0, Z — простір Мура, $f \in K_hC(X \times Y, Z)$ і f_{y_0} — категорно клікове відображення. Тоді $C_{y_0}(f)$ є всюди щільною G_δ-множиною в X.*

Доведення. Нехай $(\mathcal{W}_n)_{n=1}^{\infty}$ — розвинення простору Z. Тоді для кожного його відкритого покриття $\mathcal{W}_n$ за лемою 2 існує таке відкрите покриття $\mathcal{W}_{n,0}$ простору Z, що $\overline{\mathcal{W}_{n,0}} \preceq \mathcal{W}_n$.

Для кожного номера n покладемо

$$G_n = \{x \in X: (\exists U \text{ — окіл } x \text{ в } X)(\exists V \text{ — окіл } y_0 \text{ в } Y)(f(U \times V) \preceq \overline{\mathcal{W}_{n,0}})\}.$$

Легко бачити, що множини G_n відкриті в X. Покажемо, що вони є всюди щільними в X. Для цього зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, візьмемо відкриту в X непорожню множину G і доведемо, що $G_n \bigcap G \neq \varnothing$.

Оскільки простір X берівський, то відкрита в ньому непорожня множина G є множиною другої категорії в X. За умовою відображення $f_{y_0}: X \to Z$ є категорно кліковим. Значить, для побудованого відкритого покриття $\mathcal{W}_{n,0}$ простору Z і відкритої множини другої категорії G в просторі X існує множина A другої категорії в X така, що $A \subseteq G$ і $f_{y_0}(A) \preceq \mathcal{W}_{n,0}$. Тобто $f_{y_0}(A) \subseteq W$ для деякого $W \in \mathcal{W}_{n,0}$. Тоді і $f^x(y_0) \in W$ при $x \in A$.

Нехай далі $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ — база відкритих околів точки y_0 в Y. Покладемо

$$A_m = \{x \in A : f^x(V_m) \subseteq W\}.$$

Оскільки всі відображення $f^x : Y \to Z$ неперервні, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = A$. З цієї рівності випливає, що існує такий номер m, що множина A_m десь щільна в X. Тоді $U_m = \operatorname{int}\overline{A_m} \neq \varnothing$. Покладемо $U = G \cap U_m$, $V = V_m$ і $A_0 = A_m \cap U$. Оскільки $U_m \subseteq \overline{A_m}$ і множини U_m відкриті, то $U_m \subseteq \overline{A_m \cap U_m}$, отже, $A_m \cap U_m \neq \varnothing$. Але

$$\varnothing \neq A_m \cap U_m \subseteq G \cap U_m = U,$$

отже, U — відкрита непорожня множина в X.

Оскільки $A_0 \subseteq U \subseteq \overline{A_0}$ і $f(A_0 \times V) \subseteq f(A_m \times V) \subseteq W$, то за лемою 1

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A_0 \times V)} \subseteq \overline{W}.$$

Таким чином, $f(U \times V) \preceq \overline{\mathcal{W}_{n,0}}$. Отже, $U \subseteq G_n$. Але $U = G \cap U_m \subseteq G$, отже, $\varnothing \neq U \subseteq G_n \cap G$, а значить, $G_n \cap G \neq \varnothing$. Таким чином, $\overline{G_n} = X$.

Оскільки X — берівський простір, то перетин $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ є всюди щільним в X. Покажемо, що $P \subseteq C_{y_0}(f)$.

Нехай $x_0 \in P$ і W — окіл точки $z_0 = f(x_0, y_0)$ в Z. Оскільки $(\mathcal{W}_n)_{n=1}^{\infty}$ — розвинення простору Z, то $\{\operatorname{st}(z_0, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ — база околів точки z_0 в Z. Отже, існує такий номер n, що $\operatorname{st}(z_0, \mathcal{W}_n) \subseteq W$. Оскільки $x_0 \in G_n$, то існують околи U та V точок x_0 і y_0 в X та Y відповідно, такі, що $f(U \times V) \preceq \overline{\mathcal{W}_{n,0}}$, тобто $f(U \times V) \subseteq \overline{W'}$ для деякого $W' \in \mathcal{W}_{n,0}$. Але $(x_0, y_0) \in U \times V$, отже, $z_0 = f(x_0, y_0) \in \overline{W'}$. Таким чином, $\overline{W'} \subseteq \operatorname{st}(z_0, \overline{\mathcal{W}_{n,0}})$. Але $\operatorname{st}(z_0, \overline{\mathcal{W}_{n,0}}) \subseteq \subseteq \operatorname{st}(z_0, \mathcal{W}_n)$. Отже, $f(U \times V) \subseteq W$, а значить, $(x_0, y_0) \in C(f)$, тобто $x_0 \in \in C_{y_0}(f)$. Таким чином, $P \subseteq C_{y_0}(f)$. Оскільки множина P є всюди щільною в X, то такою ж буде й множина $C_{y_0}(f)$. Крім того, за наслідком 1 множина $C_{y_0}(f)$ типу G_δ в X. Таким чином, теорему доведено.

З допомогою теореми Банаха про категорію [16, с. 87] легко довести, що в кожному топологічному просторі X існує його відкритий підпростір T, який є берівським простором в індукованій з X топології і залишковою множиною в X. Такий підпростір ми називаємо *берівським ядром* простору X. Використовуючи це зауваження, ми можемо подати попередній результат у кращій редакції.

Теорема 3. *Нехай X і Y — топологічні простори, y_0 — точка простору Y така, що в Y існує зліченна база околів точки y_0, Z — простір Мура, $f \in \in K_hC(X \times Y, Z)$ і f_{y_0} — категорно клікове відображення. Тоді $C_{y_0}(f)$ є залишковою в X множиною типу G_δ.*

Доведення. Нехай T — берівське ядро простору X. Покладемо $g = f\big|_{T \times Y}$. Оскільки множина T відкрита, то $g \in K_hC(T \times Y, Z)$. За теоремою 2 множина $C_{y_0}(g)$ є всюди щільною G_δ-множиною в T, а отже, вона є залишковою в T, а значить, і в X. Але $C_{y_0}(g) \subseteq C_{y_0}(f)$, бо множина T є відкритою в X, отже, і $C_{y_0}(f)$ є залишковою в X множиною. Далі залишається скористатись наслідком 1.

9. Доведемо нарешті основний результат даної статті.

Теорема 4. *Нехай X і Y — топологічні простори, y_0 — точка простору Y така, що в Y існує зліченна база околів точки y_0, Z — простір Мура, $f \in K_h\tilde{C}(X \times Y, Z)$ і f_{y_0} — категорно клікове відображення. Тоді $C_{y_0}(f)$ є залишковою в X множиною типу G_δ.*

Доведення. Той факт, що множина $C_{y_0}(f)$ є типу G_δ в X, випливає з наслідку 1. Отже, залишається довести, що $C_{y_0}(f)$ — залишкова в X множина.

Нехай T — берівське ядро простору X. Покладемо $g = f|_{T\times Y}$ і $T_0 = \{x \in T : g^x = f^x \in C(Y, Z)\}$. Ясно, що $g \in K_h\tilde{C}(T \times Y, Z)$. Отже, множина T_0 є залишковою у берівському просторі T. Тому підпростір T_0 є всюди щільним в T. Крім того, множина T_0 сама є берівським простором в індукованій з T топології [17, с. 117]. Розглянемо відображення $g_0 = g|_{T_0\times Y}$ і покажемо, що воно задовольняє умови теореми 2. Зрозуміло, що $g_0 \in K_hC(T_0 \times Y, Z)$. Позначимо $h = f_{y_0}$. За умовою відображення h є категорно кліковим. Тоді за лемою 3 звуження $h|_{T_0} = (h|_T)|_{T_0}$ є категорно кліковим. Таким чином, $(g_0)_{y_0} = h|_{T_0}$ категорно клікове відображення. За теоремою 2 множина $C_{y_0}(g_0)$ є залишковою в T_0, а значить, і в X.

Для завершення доведення залишається показати, що $C_{y_0}(g_0) \subseteq C_{y_0}(f)$. Оскільки множина T є відкритою в X, то $C_{y_0}(g) \subseteq C_{y_0}(f)$. Покажемо, що $C_{y_0}(g_0) \subseteq C_{y_0}(g)$.

Нехай $x_0 \in C_{y_0}(g_0)$, тобто $p_0 = (x_0, y_0) \in C(g_0)$. Простір Z є регулярним, тому в ньому існує база замкнених околів точки $z_0 = g_0(p_0)$. Нехай W — замкнений окіл точки z_0 в Z. Оскільки $p_0 \in C(g_0)$, то існують такі відкритий окіл U точки x_0 в T і окіл V точки y_0 в Y, що

$$g_0((U \cap T_0) \times V) = g((U \cap T_0) \times V) \subseteq W.$$

Покладемо $A = U \cap T_0$. Тоді $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. За лемою 1

$$g(U \times V) \subseteq \overline{g(A \times V)} \subseteq \overline{W} = W.$$

Отже, $p_0 \in C(g)$, і потрібне включення встановлено. Таким чином, $C_{y_0}(g_0) \subseteq C_{y_0}(f)$, і теорему доведено.

10. На завершення наведемо приклад, який показує, що теорема 4 сильніша за вищезгаданий результат Пьотровського. Нагадаємо, що відображення $f: X \to Y$ називається *квазінеперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і для кожного околу U точки x_0 в X існують точка $x_1 \in U$ і її окіл U_1 в X такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Кажуть, що f — *квазінеперервне відображення,* якщо воно є таким у кожній точці простору X.

Твердження 2. *Нехай*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| \ge |x|, \\ \dfrac{|y|}{|x|}, & |y| \le |x|, \quad x \ne 0. \end{cases}$$

Тоді $f \in K_hC(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, розріз $f_0 = f(\cdot, 0)$ є кліковим, а значить, і категорно кліковим, але не квазінеперервним відображенням.

Доведення. Розглянемо відкриту в $\mathbb{R}^2$ множину $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Множини

$$F_1 = \{(x, y) \in E : |y| \ge |x|\} \quad \text{і} \quad F_2 = \{(x, y) \in E : |y| \le |x|\},$$

очевидно, замкнені в E і $F_1 \cup F_2 = E$. Оскільки звуження $f|_{F_1}$ і $f|_{F_2}$ є неперервними, то і звуження $f|_E$ є неперервним. Це показує, що функція f є сукуп-но неперервною в кожній точці множини E. Покажемо далі, що $(0, 0) \in D(f)$. Справді, сукупної неперервності функції f у точці $(0, 0)$ бути не може, адже розріз $f_0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \ne 0 \end{cases}$ не є неперервним у точці $x = 0$. Цей розріз, очевидно, є кліковим (а значить, і категорно кліковим) відображенням.

Зрозуміло, що f є горизонтально квазінеперервним у кожній точці з E, бо $E = C(f)$. Покажемо, що f — горизонтально квазінеперервне в точці $(0, 0)$. Нехай $\varepsilon, \delta > 0$ і $O = [-\delta, \delta]^2$. Маємо $f(0, 0) = 1$ і $f(x, y) = 1$ при $y \ge |x|$ і при $y \le -|x|$. Якщо взяти $0 < y_1 < \delta$, то $U_1 = (-y_1, y_1) \subseteq [-\delta, \delta]$. Крім того, $|f(x, y_1) - f(0, 0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ при $x \in U_1$, що й дає нам горизонтальну квазінеперервність f у точці $(0, 0)$. Оскільки вертикальний розріз f^x при $x \ne 0$, очевидно, є неперервним, а $f^0(y) = 1$ для всіх y, то $f \in K_h C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Але горизонтальний 0-розріз f_0 функції f не є квазінеперервним в точці $x = 0$. Отже, $f \notin K\tilde{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в індуктивних границях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 380 – 384.
2. *Маслюченко В. К., Михайлюк О. В., Собчук О. В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192 – 246.
3. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 3. – С. 337 – 344.
4. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Шишина О. І.* Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 42 – 46.
5. *Маслюченко В. К., Філіпчук О. І.* Точкова розривність $K_h K$-функцій зі значеннями в σ-метризовних просторах // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика.– Чернівці: Рута, 2004. – Вип. 191 – 192. – С. 103 – 106.
6. *Маслюченко В. К., Філіпчук О. І.* Нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Немицького // Математичний аналіз і суміжні питання: Тези доповідей міжнародної конференції (Львів, 17 – 20 листопада, 2005). – 2005. – С. 66.
7. *Карлова О. О. . Куцак С. М., Маслюченко В. К.* Узагальнення теореми Бера на випадок неметризовного простору значень // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – Вип. 228. – С. 11 – 14.
8. *Маслюченко В. К., Філіпчук О. І.* До питання про точки розриву $K_h C$-функцій на неперервних кривих // Науковий вісник Чернівецького університету.Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – Вип. 314 – 315. – С. 122 – 124.
9. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Філіпчук О. І.* Точки сукупної неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в площині Немицького // Мат. студії. – 2006. – **26**, № 2. – С. 217 – 221.
10. *Piotrowski Z.* Mibu-type theorems // Proceedings of the 7th International Symposium (Poland, 20 – 26 September, 1993). – 1993. – P. 141 – 147.
11. *Piotrowski Z.* On the theorems of Y. Mibu and G. Debs on separate continuity / Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1996. – **19**, № 3. – P. 495 – 500.
12. *Маслюченко В. К.* Лінійні неперервні оператори. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
13. *Gruenhage G.* Generalized metric spaces // Handbook of Set-Theoretic Topology. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – P. 423 – 501.
14. *Fleissner W.* Separation properties in Moore spaces // Fundamenta Mathematicae. – 1978. – **98**. – P. 279 – 286.
15. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М. : Мир, 1986. – 752 с.
16. *Куратовский К.* Топология. Т. I. – М. : Мир, 1966. – 594 с.
17. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. – М. : Наука, 1975. – 408 с.

Одержано 22.05.07, після доопрацювання — 11.06.08