УДК 512.664.3

Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ КОЦИКЛОВ ДЛЯ ДВОЙНОГО СКРЕЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП*

For locally compact groups K, M, N such that M, N are subgroups of K, $K = M \cdot N$ and $M \cap N = \{e\}$, where e is the identity of the group K, we give a complete description and propose the method of the construction of pairs of continuous cocycles that are used in the bicrossed product with cocycles in terms of continuous 2-cocycles on the groups M, N, K and 3-cocycles on the group K.

Для локально компактних груп K, M, N таких, що M, N — підгрупи K, $K = M \cdot N$ і $M \cap N = \{e\}$, де e — одиниця групи K, наведено повний опис та побудову пар неперервних коциклів, що використовуються в конструкції подвійного схрещеного добутку з коциклами в термінах неперервних 2-коциклів на групах M, N, K і 3-коциклів на групі K.

1. Введение. Конструкция двойного скрещенного произведения конечных групп с коциклами была предложена Г. И. Кацем в [1] для построения примеров конечномерных кольцевых групп, называемых сейчас конечномерными алгебрами Каца. Далее эта конструкция обобщалась для локально компактных групп в [2], и наиболее общая конструкция дана в [3], примеры для малых размерностей приведены в [4]. Для конечномерных алгебр Хопфа аналогичная конструкция исследована в [5]. Коциклы, содержащиеся в конструкции, образуют группу, которая для конечномерных алгебр Каца была охарактеризована в терминах точной последовательности в [1]. Далее этот результат был обобщен для измеримых коциклов в [6]. Аналогичный результат для конечномерных биалгебр Ли получен в [7].

Однако при применении конструкции двойного скрещенного произведения групп возникает необходимость явно вычислять представители группы коциклов. Этот вопрос и решается в настоящей статье для непрерывных коциклов. Дается новое доказательство точности последовательности Каца в терминах неоднородных коциклов. Это позволяет получить явную формулу для нахождения всех непрерывных коциклов в терминах обычных непрерывных 2- и 3-коциклов на группах, что является основным результатом настоящей статьи.

В случае, когда рассматривается двойное скрещенное произведение групп Ли и одна из подгрупп одномерна, алгоритм для построения некоторых пар коциклов был предложен в [3]. Другой алгоритм для нахождения пар коциклов для групп Ли, при выполнении некоторых дополнительных условий, предложен в [8] (см. также [9]).

Статья построена следующим образом. В п. 2 приведены необходимые определения и результаты. В п. 3 доказана точность последовательности Каца в терминах неоднородных коциклов и изложен основной результат статьи. В п. 4 приведен пример нильпотентной группы $Z(3)$ верхнетреугольных матриц порядка 3 с единицей на главной диагонали. Этот пример, в числе других, был рассмотрен в [4], однако мы используем его в качестве иллюстрации использования основного результата статьи.

2. Определения и обозначения. Всюду далее под группой понимаем локально компактную группу. Элементы групп K, M, N будем обозначать $k, k_1, \ldots$

*Частично поддержана научной программой НАН Украины (проект № 0107U002333).

$\ldots, m, m_1, \ldots, n, n_1, \ldots$. Множества натуральных, целых, действительных чисел обозначаем $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ соответственно. Будем рассматривать $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ как коммутативную группу по сложению с естественной топологией. Для топологических пространств X, Y множество непрерывных функций на X со значением в Y обозначается через $C(X, Y)$.

Пусть M, N — подгруппы группы K такие, что

$$K = M \cdot N \quad \text{и} \quad M \cap N = \{e\}, \tag{1}$$

где e — единичный элемент группы K. Пару (M, N) будем называть *парой согласованных групп*. Представление (1) для элементов группы K означает, что каждый элемент $k \in K$ может быть представлен в виде $k = m \cdot n$, $m \in M$, $n \in N$, и притом однозначно. Это свойство порождает левое действие $\triangleright\colon N \times M \to M$ группы N на множестве группы M и правое действие $\triangleleft\colon N \times M \to N$ группы M на множестве группы N, определяемые равенством

$$n \cdot m = (n \triangleright m) \cdot (n \triangleleft m), \qquad m \in M, \quad n \in N, \tag{2}$$

и удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} n \triangleright (m_1 \cdot m_2) = (n \triangleright m_1) \cdot ((n \triangleleft m_1) \triangleright m_2), \\ (n_1 \cdot n_2) \triangleleft m = (n_1 \triangleleft (n_2 \triangleright m)) \cdot (n_2 \triangleleft m). \end{gathered} \tag{3}$$

Для сокращения обозначений мы часто будем опускать точку в произведении элементов группы и, записывая произведение и действие вместе, будем иметь в виду, что произведение предшествует действию. Например, $n \triangleright m_1 m_2 = n_1 \triangleright \triangleright (m_1 m_2)$ и $n_1 n_2 \triangleright m = (n_1 n_2) \triangleright m$. Те же соглашения предполагаются для правого действия.

Напомним, что для группы G с единицей e рассматриваются тривиальные G-модули

$$C^n(G) = \Big\{ f \in C(G^n, \mathbb{T}) \mid f(g_1, \ldots, g_n) = 0, \\ \text{если } \ g_i = e \text{ для некоторого } \ i = 1, \ldots, n \Big\}$$

непрерывных $\mathbb{T}$-значных неоднородных нормализованных n-коцепей на группе G и последовательность морфизмов $d^n\colon C^n(G) \to C^{n+1}(G)$, определяемых для $f \in C^n(G)$ формулой

$$(d^n f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n). \tag{4}$$

При этом используются следующие обозначения: $Z^n(G) = \operatorname{Ker} d^n$ — группа *n-коциклов*, $B^n(G) = \operatorname{Im} d^{n-1}$ — группа *n-кограниц*, $H^n(G) = Z^n(Z)/B^n(G)$ — группа непрерывных когомологий группы G со значениями в $\mathbb{T}$ (см. [10]).

Пусть (M, N) — согласованная пара локально компактных групп.

Определение 1. *Пара (u, v) непрерывных функций $u\colon N \times M \times M \to \mathbb{T}$ и $v\colon N \times N \times M \to \mathbb{T}$ называется парой коциклов на согласованной паре групп (M, N), если непрерывная функция $f_{u,v}\colon K^3 \to \mathbb{T}$, определенная как*

$$f_{u,v}(k_1, k_2, k_3) = u(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) + v(n_1 \triangleleft m_2, n_2, m_3), \tag{5}$$

где $k_i = m_i n_i$, $i = 1, 2, 3$, является неоднородным нормализованным 3-коциклом на группе K.

Две пары коциклов (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на согласованной паре (M, N) называются эквивалентными, если существует $r \in C^2(K)$ такая, что

$$r(k_1, k_2) = r(n_1, m_2) \tag{6}$$

для всех $k_i \in K$, где $k_i = m_i n_i$, $i = 1, 2$, и

$$f_{u_2,v_2} - f_{u_1,v_1} = d^2 r. \tag{7}$$

***Замечание* 1.** Г. И. Кац в [1] определил пару коциклов и их эквивалентность посредством соотношений, которые, как показано в [11], эквивалентны условиям определения 1.

Множество классов эквивалентности $[u, v]$ пар коциклов на согласованной паре групп (M, N) образуют группу относительно поточечного сложения, т. е. $[u_1, v_1] + [u_2, v_2] = [u_1 + u_2, v_1 + v_2]$. Эту группу далее обозначим $E(M, N)$.

***Замечание* 2.** Легко видеть, что f — нормализованный 3-коцикл на K, удовлетворяющий условию

$$f(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3) = f(n_1, m_2 n_2, m_3) \tag{8}$$

для всех $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, 3$, тогда и только тогда, когда пара (u, v) функций, определенных как ограничения

$$u = f\restriction_{N \times M \times M}, \qquad v = f\restriction_{N \times N \times M}, \tag{9}$$

является парой коциклов на согласованной паре (M, N).

Поэтому, обозначив через ${}_M Z^3_N(K)$ подгруппу в $Z^3(K)$ 3-коциклов, удовлетворяющих (8), группу $E(M, N)$ будем рассматривать как ${}_M Z^3_N(K)/\sim$, где соотношение эквивалентности $\sim$ задается (7) и (6).

3. Точная последовательность Каца. В случае конечных M и N для описания группы $E(M, N)$ Г. И. Кац [1] получил длинную точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^2(K) \xrightarrow{\pi^2_*} H^2(M) \oplus H^2(N) \xrightarrow{\sigma_*}$$

$$\xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{E(M,N)} \xrightarrow{\iota_*} H^3(K) \xrightarrow{\pi^3_*} H^3(M) \oplus H^3(N) \longrightarrow \ldots \tag{10}$$

в терминах однородных коциклов.

Ниже мы определяем явным образом отображения π^2_*, σ_*, ι_*, π^3_* в рассматриваемом случае и непосредственно доказываем точность последовательности (10) в терминах неоднородных коциклов.

π^2, π^3: Определим $\pi^2\colon Z^2(K) \to Z^2(M) \oplus Z^2(N)$ на $f \in Z^2(K)$ как

$$\pi^2(f) = \pi^2_M(f) + \pi^2_N(f), \tag{11}$$

где $\pi^2_M\colon Z^2(K) \to Z^2(M)$ и $\pi^2_N\colon Z^2(K) \to Z^2(N)$ — соответствующие ограничения, т. е.

$$\pi^2_M(f)(m_1, m_2) = f(m_1, m_2), \qquad \pi^2_N(f)(n_1, n_2) = f(n_1, n_2). \tag{12}$$

Отображения π^3_M, π^3_N и $\pi^3 = \pi^3_M + \pi^3_N$ определяются аналогичным образом.

σ: Пусть $f = f_M + f_N$, где $f_M \in Z^2(M)$, $f_N \in Z^2(N)$. Тогда для $k_i = m_i n_i$, $i = 1, 2, 3$, положим

$$\begin{gathered}\sigma(f_M)(k_1, k_2, k_3) = -f_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + f_M(m_2, n_2 \triangleright m_3),\\ \sigma(f_N)(k_1, k_2, k_3) = f_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) - f_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2).\end{gathered} \tag{13}$$

ι: Использовав замечание 2, определим $\iota\colon {}_M Z^3_N(K) \to Z^3(K)$ как вложение, т. е. для $f \in {}_M Z^3_N(K)$

$$\iota(f) = f. \tag{14}$$

Лемма 1. *Отображения* π^2, π^3, σ, ι, *определенные формулами* (11), (13), (14), *корректно определяют гомоморфизмы* π^2_*, π^3_*, σ_*, ι_* *соответствующих групп в* (10).

Доказательство. Корректность определения π^2_*, π^3_* очевидна.

Докажем корректность σ_*. Пусть $f_M \in Z^2(M)$. Прежде всего из определения (13) следует, что $\sigma(f_M)$ удовлетворяет (8). Теперь докажем, что $\sigma(f_M) \in \in Z^3(K)$. Для $k_i = m_i n_i$, $i = 1, \ldots, 4$, используя (4) и (3), имеем

$$\begin{gathered} d^3(\sigma(f_M))(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sigma(f_M)(m_2 n_2, m_3 n_3, m_4 n_4) - \\ - \sigma(f_M)(m_1 n_1 m_2 n_2, m_3 n_3, m_4 n_4) + \sigma(f_M)(m_1 n_1, m_2 n_2 m_3 n_3, m_4 n_4) - \\ - \sigma(f_M)(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3 m_4 n_4) + \sigma(f_m)(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3) = \\ = \sigma(f_M)(m_2 n_2, m_3 n_3, m_4 n_4) - \sigma(f_M)(m_1(n_1 \triangleright m_2)(n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3 n_3, m_4 n_4) + \\ + \sigma(f_M)(m_1 n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)(n_2 \triangleleft m_3)n_3, m_4 n_4) - \\ - \sigma(f_M)(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3(n_3 \triangleright m_4)(n_3 \triangleleft m_4)n_4) + \\ + \sigma(f_M)(m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3). \end{gathered}$$

Теперь, используя (13) и (3) и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{gathered} d^3(\sigma(f_M))(k_1, k_2, k_3, k_4) = -f_M(n_2 \triangleright m_3, (n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4) + \\ + f_M\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4\big) - \\ - f_M\big((n_1 \triangleright m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3), (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))(n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4\big) + \\ + f_M\big(m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4\big) + \\ + f_M\big(n_1 \triangleright m_2, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)(((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4)\big) - \end{gathered}$$

$$- f_M\big(m_2, (n_2 \triangleright m_3)((n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4)\big) -$$

$$- f_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + f_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) =$$

$$= -(d^2 f_M)(m_2, n_2 \triangleright m_3, (n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4) +$$

$$+ (d^2 f_M)(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3 \triangleright m_4).$$

Последнее выражение равно 0, так как $f_M \in Z^2(M)$.

Пусть теперь $f_M \in B^2(M)$, т. е. $f_M = d^1 r_M$ для некоторой $r_M \in C^1(M)$. Тогда

$$\sigma(f_M)(k_1, k_2, k_3) = \sigma(d^1 r_M)(m_1n_1, m_2n_2, m_3n_3) =$$

$$= -d^1 r_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + d^1 r_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) =$$

$$= -r_M\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3\big) + r_M\big((n_1 \triangleright m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3\big) - r_M(n_1 \triangleright m_2) +$$

$$+ r_M(n_2 \triangleright m_3) - r_M\big(m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) + r_M(m_2).$$

Определяя 2-коцепь r на K формулой

$$r(m_1n_1, m_2n_2) = r_M(n_1 \triangleright m_2) - r_M(m_2),$$

получаем $\sigma(f_M) = d^2 r$. Кроме того, r удовлетворяет условию (6). Следовательно, $\sigma(f_M)$ — тривиальный элемент $E(M, N)$.

Аналогичные рассуждения проводим для $f_N \in Z^2(N)$.

Наконец, корректность ι_* непосредственно следует из определения $E(M, N)$ (см. замечание 2).

Лемма доказана.

Утверждение 1. *Последовательность* (10) *точна в члене* $H^2(M) \oplus H^2(N)$.

Доказательство. Везде ниже $k_i = m_in_i$, $k_i \in K$, $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i \in \mathbb{N}$.

Прежде всего заметим, что если $f \in Z^2(K)$, то $d^2 f = 0$ и, следовательно,

$$f(k_1k_2, k_3) = f(k_2, k_3) + f(k_1, k_2k_3) - f(k_1, k_2), \tag{15}$$

$$f(k_1, k_2k_3) = f(k_1, k_2) + f(k_1k_2, k_3) - f(k_2, k_3) \tag{16}$$

для всех k_1, k_2, $k_3 \in K$.

Теперь докажем, что $\sigma_* \circ \pi_*^2 = 0$. Пусть $f \in Z^2(K)$. По определению (11) и (13)

$$\big((\sigma \circ \pi^2)(f)\big)(k_1, k_2, k_3) = f\big(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3\big) - f(n_1 \triangleleft m_2, n_2) -$$

$$- f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3\big) + f(m_2, n_2 \triangleright m_2). \tag{17}$$

Покажем, что

$$(\sigma \circ \pi^2)(f) = d^2 r,$$

где

$$r(k_1, k_2) = -f(n_1, m_2) + f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2).$$

Заметим, что r удовлетворяет (6). Далее,

$$d^2 r(k_1,k_2,k_3) = r(k_2,k_3) - r(k_1k_2,k_3) + r(k_1,k_2k_3) - r(k_1,k_2) =$$
$$= r(n_2,m_3) - r\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3\big) + r\big(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - r(n_1,m_2) =$$
$$= -f(n_2,m_3) + f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) +$$
$$+ f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3\big) - f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3\big) -$$
$$- f\big(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) + f\big(n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) +$$
$$+ f(n_1,m_2) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2).$$

Применяя (3) к четвертому и шестому членам последнего выражения, имеем

$$d^2\varphi(k_1,k_2,k_3) = -f(n_2,m_3) + f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) +$$
$$+ f\big((n_1 \triangleleft m_2)\cdot n_2, m_3\big) -$$
$$- f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))\cdot(n_2 \triangleleft m_3)\big) -$$
$$- f\big(n_1, m_2\cdot(n_2 \triangleright m_3)\big) +$$
$$+ f\big((n_1 \triangleright m_2)\cdot((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) +$$
$$+ f(n_1,m_2) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2).$$

Применяя свойства 3-коцикла (15) и (16) к третьему, четвертому, пятому и шестому членам и сокращая подобные, находим

$$d^2 r(k_1,k_2,k_3) = f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) + f(n_1 \triangleleft m_2, n_2m_3) - f(n_1 \triangleleft m_2, n_2) -$$
$$- f\big(((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)\cdot(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)), n_2 \triangleleft m_3\big) +$$
$$+ f(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) -$$
$$- f(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3) + f(m_2, n_2 \triangleright m_3) +$$
$$+ f\big(n_1 \triangleright m_2, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)\cdot(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))\big) -$$
$$- f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3\big) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2).$$

Далее, применяя определения левого и правого действий (2) ко второму, четвертому, шестому и восьмому слагаемым, получаем

$$d^2 r(k_1,k_2,k_3) = f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) + f\big(n_1 \triangleleft m_2, (n_2 \triangleright m_3)\cdot(n_2 \triangleleft m_3)\big) -$$
$$- f(n_1 \triangleright m_2, n_2) - f\big((n_1 \triangleleft m_2)\cdot(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3\big) +$$
$$+ f(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) - f\big((n_1 \triangleright m_2)\cdot(n_1 \triangleleft m_2), n_2 \triangleright m_3\big) +$$
$$+ f(m_2, n_2 \triangleright m_3) + f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)\cdot(n_2 \triangleright m_3)\big) -$$
$$- f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3\big) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2).$$

Снова применяя (15) к четвертому слагаемому и (16) к шестому и приводя подобные члены, находим выражение в правой части (17).

Пусть теперь $f_M \in Z^2(M)$, $f_N \in Z^2(N)$ такие, что $\sigma(f_M + f_N) = d^2 r$ для некоторой $r \in C^2(K)$, удовлетворяющей (6), т. е.

$$d^2 r(k_1, k_2, k_3) = -f_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + f_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) + \\ + f_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) - f_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2). \tag{18}$$

Построим $f \in Z^2(K)$ так, чтобы $\pi_M^2(f) = f_M$ и $\pi_N^2(f) = f_N$. Для этого положим

$$f = \tilde{f} - r, \tag{19}$$

где

$$\tilde{f}(k_1, k_2) = f_M(m_1, n_1 \triangleright m_2) + f_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2). \tag{20}$$

Прежде всего докажем, что $f \in Z^2(K)$. Используя (2), имеем

$$d^2 \tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \tilde{f}(k_2, k_3) - \tilde{f}\big(m_1(n_1 \triangleright m_2)(n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3\big) + \\ + \tilde{f}\big(k_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)(n_2 \triangleleft m_3)n_3\big) - \tilde{f}(k_1, k_2).$$

Используя определение (20), свойства (3) и меняя порядок слагаемых, находим

$$d^2 \tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = f_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) - f_M(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + \\ + f_M\big(m_1, (n_1 \triangleright m_2) \cdot ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)\big) - f_M(m_1, n_1 \triangleright m_2) + \\ + f_N(n_2 \triangleleft m_3, n_3) - f_N\big((n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)) \cdot (n_2 \triangleleft m_3), n_3\big) + \\ + f_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - f_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2).$$

Используя (15) для третьего и (16) для шестого слагаемых и приводя подобные члены, получаем правую часть формулы (18). Таким образом, $d^2 \tilde{f} = d^2 r$. Это доказывает, что $df = 0$ и f, определенная (19), является 2-коциклом на K.

Из определения (20) следует, что $\pi_M^2(\tilde{f}) = f_M$ и $\pi_N^2(\tilde{f}) = f_N$, поскольку r удовлетворяет (6) и является нормализованной коцепью, так что $\pi_M^2(r) = \pi_N^2(r) = 0$.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Последовательность* (10) *точна в члене* $E(M, N)$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\iota_* \circ \sigma_* = 0. \tag{21}$$

Пусть $f_M \in Z^2(M)$. Найдем $\varphi_M \in C^2(K)$ такую, что

$$(\iota \circ \sigma)(f) = d^2 \varphi_M. \tag{22}$$

По определению

$$(\iota \circ \sigma)(f_M)(k_1, k_2, k_3) = -f_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + f_M(m_2, n_2 \triangleright m_3). \tag{23}$$

Положим
$$\varphi_M(k_1,k_2)=f_M(m_1,n_1\triangleright m_2). \tag{24}$$
Имеем
$$d^2\varphi_M(k_1,k_2,k_3)=\varphi_M(k_2,k_3)-\varphi_M(m_1(n_1\triangleright m_2)(n_1\triangleleft m_2)n_2,k_3)+$$
$$+\varphi_M(k_1,m_2(n_2\triangleright m_3)(n_2\triangleleft m_3)n_3)-\varphi_M(k_1,k_2),$$
где использовано тождество (2). По определению (24) имеем
$$d^2\varphi_M(k_1,k_2,k_3)=f_M(m_2,n_2\triangleright m_3)-f_M(m_1(n_1\triangleright m_2),(n_1\triangleleft m_2)n_2\triangleright m_3)+$$
$$+f_M\big(m_1,(n_1\triangleright m_2)\cdot((n_1\triangleleft m_2)n_2\triangleright m_3)\big)-f_M(m_1,n_1\triangleright m_2),$$
где в третьем слагаемом использовано тождество из (3). Теперь, используя тождество (16) для третьего слагаемого и приводя подобные члены, получаем правую часть равенства (23).

Аналогичные вычисления показывают, что, определяя $\varphi_N(k_1,k_2)=f_N(n_1\triangleleft m_2,n_2)$ для $f_N\in Z^2(N)$, имеем $(\iota\circ\sigma)(f_N)=d^2\varphi_N$.

Это доказывает (21).

Пусть теперь $f\in {}_MZ^3_N(K)$, причем $\iota_*[f]=0$ в $H^3(K)$, т. е.
$$f(k_1,k_2,k_3)=d^2\varphi(k_1,k_2,k_3) \tag{25}$$
для некоторой коцепи $\varphi\in C^2(K)$, и докажем, что существуют $f_M\in Z^2(M)$ и $f_N\in Z^2(N)$ такие, что $f\sim\sigma(f_M+f_N)$, где эквивалентность определяется (7).

Поскольку f — нормализованный 3-коцикл, удовлетворяющий (8), из тождества (25) следует, что для всех $k_1,\ k_2,\ k_3\in K$, $m_1\in M$, $n_3\in N$
$$d^2\varphi(m_1,k_2,k_3)=0, \tag{26}$$
$$d^2\varphi(k_1,k_2,n_3)=0, \tag{27}$$
а отсюда — что
$$\pi^2_M(\varphi)\in Z^2(M),\qquad \pi^2_N(\varphi)\in Z^2(N), \tag{28}$$
а также
$$\varphi(m_1k_2,k_3)=\varphi(k_2,k_3)+\varphi(m_1,k_2k_3)-\varphi(m_1,k_2), \tag{29}$$
$$\varphi(k_1,k_2n_3)=\varphi(k_1,k_2)+\varphi(k_1k_2,n_3)-\varphi(k_2,n_3). \tag{30}$$
Как следует из (5),
$$f(k_1,k_2,k_3)=f(n_1\triangleleft m_2,n_2,m_3)+f(n_1,m_2,n_2\triangleright m_3)=$$
$$=d^2\varphi(n_1\triangleleft m_2,n_2,m_3)+d^2\varphi(n_1,m_2,n_2\triangleright m_3)=$$
$$=\varphi(n_2,m_3)-\varphi\big((n_1\triangleleft m_2)n_2,m_3\big)+\varphi(n_1\triangleleft m_2,n_2m_3)-$$
$$-\varphi(n_1\triangleleft m_2,n_2)+\varphi(m_2,n_2\triangleright m_3)-\varphi(n_1m_2,n_2\triangleright m_3)+$$

$$+\,\varphi\big(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - \varphi(n_1, m_2). \tag{31}$$

Рассмотрим шестое слагаемое в последнем выражении. Используя (2), (29), (30), имеем

$$\varphi(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3) = \varphi\big((n_1 \triangleright m_2)(n_1 \triangleleft m_2), n_2 \triangleright m_3\big) =$$

$$= \varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) + \varphi\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)(n_2 \triangleright m_3)\big) -$$

$$-\,\varphi(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2) =$$

$$= \varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) + \varphi\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) -$$

$$-\varphi(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2) =$$

$$= \varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) + \varphi(n_1 \triangleleft m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+\,\varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) -$$

$$-\,\varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - \varphi(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2). \tag{32}$$

Точно так же для третьего слагаемого в последнем выражении (31) находим

$$\varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2m_3) = \varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) + \varphi(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\,\varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))(n_2 \triangleleft m_3)\big) -$$

$$-\,\varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - \varphi(n_2 \triangleleft m_3, n_2 \triangleright m_3). \tag{33}$$

Определим

$$r_1(k_1, k_2) = \varphi(n_1, m_2), \qquad r_2(k_1, k_2) = \varphi(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2). \tag{34}$$

Заметим, что r_1 и r_2 удовлетворяют условию (6). Имеем

$$\begin{gathered} d^2r_1(k_1, k_2, k_3) = \varphi(n_2, m_3) - \varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3\big) + \\ +\,\varphi\big(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - \varphi(n_1, m_2), \\ d^2r_2(k_1, k_2, k_3) = \varphi(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) - \\ -\,\varphi\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3\big) + \\ +\,\varphi\big(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big) - \\ -\,\varphi(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2). \end{gathered} \tag{35}$$

Подставляя (33), (32) в (31) и используя (35), после приведения подобных членов получаем

$$(f - d^2r_1 + d^2r_2)(k_1, k_2, k_3) =$$

$$= -\varphi(n_1 \triangleleft m_2, n_2) + \varphi(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\ \varphi(m_2, n_2 \triangleright m_2) - \varphi(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) \ =$$

$$= \sigma\big(\pi^2_M(\varphi) + \pi^2_N(\varphi)\big)(k_1, k_2, k_3).$$

Остается положить $f_M = \pi^2(\varphi)$, $f_N = \pi^2_N(\varphi)$.

При доказательстве точности в члене $H^3(K)$ будет использовано представление (37).

Лемма 2. *Пусть* $f \in Z^3(K)$, $k_i = m_i n_i$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда, определяя* $\varphi \in \in C^2(K)$ *как*

$$\varphi(k_1, k_2) = f(m_1, n_1, k_2) - f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2) -$$

$$-\ f(n_1, m_2, n_2) + f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2), \tag{36}$$

имеем

$$f(k_1, k_2, k_3) - d\,\varphi(k_1, k_2, k_3) = f(n_1 \triangleleft m_2, n_2, m_3) + f(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+\ f((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\ f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)) -$$

$$-\ f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) - f(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\ f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) + f(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3). \tag{37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $f \in Z^3(K)$ эквивалентно каждому из следующих тождеств:

$$f(k_1 \cdot k_2, k_3, k_4) = f(k_2, k_3, k_4) + f(k_1, k_2 k_3, k_4) - f(k_1, k_2, k_3 k_4) + f(k_1, k_2, k_3), \tag{38}$$

$$f(k_1, k_2 \cdot k_3, k_4) = f(k_1 k_2, k_3, k_4) - f(k_2, k_3, k_4) + f(k_1, k_2, k_3 k_4) - f(k_1, k_2, k_3), \tag{39}$$

$$f(k_1, k_2, k_3 \cdot k_4) = f(k_1, k_2, k_3) + f(k_1, k_2 k_3, k_4) - f(k_1 k_2, k_3, k_4) + f(k_2, k_3, k_4), \tag{40}$$

точки в левых частях которых указывают на раскладываемые произведения.

Как и ранее, $k_i = m_i n_i$, где $k_i \in K$, $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, 3$. Итак, имеем

$$f(k_1, k_2, k_3) = f(m_1 \cdot n_1, k_2, k_3) =$$

$$= f(n_1, k_2, k_3) + f(m_1, n_1 k_2, k_3) - f(m_1, n_1, k_2 k_3) + f(m_1, n_1, k_2).$$

Применяя (39) к первому слагаемому $f(n_1, k_2, k_3) = f(n_1, m_2 \cdot n_2, k_3)$ и ко второму $f(m_1, n_1 k_2, k_3) = f(m_1, (n_1 \triangleright m_2) \cdot (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3)$ и меняя порядок суммирования, получаем

$$f(k_1, k_2, k_3) = f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 k_3) - f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2) +$$

$$+\ f(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) - f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) +$$

$$+ f(n_1, m_2, n_2k_3) - f(n_1, m_2, n_2) + f(n_1m_2, n_2, k_3) -$$
$$- f(m_2, n_2, k_3) - f(m_1, n_1, k_2k_3) + f(m_1, n_1, k_2).$$

Поскольку для $\varphi_1(k_1, k_2) = f(m_1, n_1, k_2)$

$$d^2\varphi_1(k_1, k_2, k_3) = f(m_2, n_2, k_3) - f(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) +$$
$$+ f(m_1, n_1, k_2k_3) - f(m_1, n_1, k_2),$$

то

$$(f + d^2\varphi_1)(k_1, k_2, k_3) =$$
$$= f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2k_3) - f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2) -$$
$$- f(n_1 \triangleleft m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) + f(n_1, m_2, n_2k_3) -$$
$$- f(n_1, m_2, n_2) + f(n_1m_2, n_2, k_3). \tag{41}$$

Полагая $\varphi_2(k_1, k_2) = f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2)$, находим

$$d^2\varphi_2(k_1, k_2, k_3) = f(m_2, n_2 \triangleright m_3, (n_2 \triangleleft m_3)n_3) -$$
$$- f\big(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3\big) +$$
$$+ f(m_1, n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3) -$$
$$- f(m_1, n_2 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2),$$

и, следовательно, применяя (40) к первому слагаемому в (41),

$$f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2k_3) =$$
$$= f\Big(m_1, n_1 \triangleright m_2, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) \cdot ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)\Big),$$

и к четвертому слагаемому в (41),

$$f(n_1, m_2, n_2k_3) = f(n_1, m_2, (n_2 \triangleright m_3) \cdot (n_2 \triangleleft m_3)n_3),$$

имеем

$$(f + d^2\varphi_1 - d^2\varphi_2)(k_1, k_2, k_3) = f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) +$$
$$+ f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3\big) -$$
$$- f(n_1 \triangleleft m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) + f(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) +$$
$$+ f(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) -$$
$$- f(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3, (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - f(n_1, m_2, n_2) + f(n_1m_2, n_2, k_3). \tag{42}$$

Положим $\varphi_3(k_1, k_2) = f(n_1, m_2, n_2)$. Тогда

$$d^2\varphi_3(k_1,k_2,k_3) = f(n_2,m_3,n_3) - f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3, n_3\big) +$$
$$+ f(n_1, m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - f(n_1,m_2,n_2). \tag{43}$$

Продолжая преобразовывать (42), обозначим

$$f_7(k_1,k_2,k_3) = f(k_1,k_2,k_3) - f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2) \triangleright m_3)$$

и применим (40) к последнему слагаемому в (42), $f(n_1m_2,n_2,k_3) = f(n_1m_2,n_2, m_3 \cdot n_3)$. С учетом (43) получим

$$(f_7 + d^2\varphi_1 - d^2\varphi_2 - d^2\varphi_3)(k_1,k_2,k_3) =$$
$$= f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3)n_3\big) -$$
$$- f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3) -$$
$$- f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2m_3, n_3) + f(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) -$$
$$- f(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3, (n_2 \triangleleft m_3)n_3) + f(n_1m_2,n_2,m_3) + f(n_1m_2,n_2m_3,n_3). \tag{44}$$

Обозначая

$$f_{27}(k_1,k_2,k_3) = f_7(k_1,k_2,k_3) - f(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3)$$

и раскладывая третье слагаемое в (44),

$$f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2m_3, n_3) =$$
$$= f(n_1 \triangleright m_2, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) \cdot ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3), n_3),$$

и последнее слагаемое в (44),

$$f(n_1m_2, n_2m_3, n_3) = f(n_1m_2, (n_2 \triangleright m_3) \cdot (n_2 \triangleleft m_3), n_3),$$

имеем

$$(f_{27} + d^2\varphi_1 - d^2\varphi_2 - d^2\varphi_3)(k_1,k_2,k_3) =$$
$$= -f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2, m_3) -$$
$$- f(n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3, n_3) +$$
$$+ f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3, n_3\big) +$$
$$+ f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3) + f(n_1m_2,n_2,m_3) -$$
$$- f(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) + f(n_1m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3) -$$
$$- f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3, n_3). \tag{45}$$

Полагая $\varphi_4(k_1,k_2) = f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2)$, находим

$$d^2\varphi_4(k_1,k_2,k_3) = f(n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3, n_3) -$$

$$- f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3, n_3\big) +$$

$$+ f(n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2),$$

и, раскладывая пятый, шестой и седьмой члены в (45),

$$f(n_1m_2, n_2, m_3) = f\big((n_1 \triangleright m_2) \cdot (n_1 \triangleleft m_2), n_2, m_3\big),$$

$$f(n_1m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) = f\big((n_1 \triangleright m_2) \cdot (n_1 \triangleleft m_2), n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3\big),$$

$$f\big(n_1m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3\big) =$$

$$= f\big((n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3)) \cdot (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)), n_2 \triangleleft m_3, n_3\big),$$

используя (40) и меняя порядок слагаемых, получаем

$$(f_{27} + d^2\varphi_1 - d^2\varphi_2 - d^2\varphi_3 + d^2\varphi_4)(k_1, k_2, k_3) =$$

$$= f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+ f(n_1 \triangleleft m_2, n_2, m_3) - f(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) -$$

$$- f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) - f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+ f(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3) +$$

$$+ f(n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3). \tag{46}$$

Рассматривая сумму первого, четвертого и седьмого слагаемых в (46), применяя (3), (2) и (39), имеем

$$f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleleft m_3) -$$

$$- f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+ f(n_1 \triangleright m_2(n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) =$$

$$= f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))(n_2 \triangleleft m_3)\big) -$$

$$- f\big(n_1 \triangleright m_2, ((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) \cdot (n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)), n_2 \triangleleft m_3\big) +$$

$$+ f\big((n_1 \triangleright m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3), n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3\big) =$$

$$= f\big((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3\big) +$$

$$+ f\big(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)\big),$$

что вместе с (46) завершает доказательство формулы (37).

Лемма доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $f \in Z^3(K)$ такой, что $\pi_M^3(f) = d^2\psi_M$, $\pi_N^3(f) = d^2\psi_N$ для некоторых $\psi_M \in C^2(M)$, $\psi_N \in C^2(N)$. Тогда*

$$f(k_1, k_2, k_3) - d^2(\varphi + \psi)(k_1, k_2, k_3) = f(n_1 \triangleleft m_2, n_2, m_3) + f(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+\, f((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\, f(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)) -$$

$$-\, f(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) - f(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) +$$

$$+\, \psi_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) - \psi_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) -$$

$$-\, \psi_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) + \psi_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2), \tag{47}$$

где φ *определено в* (36), *а*

$$\psi(k_1, k_2) = \psi_M(m_1, n_1 \triangleright m_2) + \psi_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2). \tag{48}$$

Доказательство. Рассмотрим два последних члена в (37). Из условия следствия имеем

$$f(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) =$$

$$= d^2\psi_M(m_1, n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) =$$

$$= \psi_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) - \psi_M(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+\, \psi_M\big(m_1, (n_1 \triangleright m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)\big) - \psi_M(m_1, n_1 \triangleright m_2),$$

$$\tag{49}$$

$$f(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3) = d^2\psi_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3, n_3) =$$

$$= \psi_N(n_2 \triangleleft m_3, n_3) - \psi_N\big((n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))(n_2 \triangleleft m_3), n_3\big) +$$

$$+\, \psi_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - \psi_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3).$$

Из (48) следует, что

$$(d^2\psi)(k_1, k_2, k_3) = \psi(k_2, k_3) - \psi(m_1(n_1 \triangleright m_2)(n_1 \triangleleft m_2)n_2, k_3) +$$

$$+\, \psi(k_1, m_2(n_2 \triangleright m_3)(n_2 \triangleleft m_3)n_3) - \psi(k_1, k_2) =$$

$$= \psi_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) - \psi_M(m_1(n_1 \triangleright m_2), (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) +$$

$$+\, \psi_M\big(m_1, (n_1 \triangleright m_2)((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3)\big) - \psi_M(m_1, n_1 \triangleright m_2) +$$

$$+\, \psi_N(n_2 \triangleleft m_3, n_3) - \psi_N\big((n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3))(n_2 \triangleleft m_3), n_3\big) +$$

$$+\, \psi_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), (n_2 \triangleleft m_3)n_3) - \psi_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2). \tag{50}$$

Подставляя выражения (49) и (50) в (37), получаем (47).

Утверждение 3. *Последовательность* (10) *точна в члене* $H^3(K)$.

Доказательство. Из описания группы $E(M,N)$ (см. замечание 2) непосредственно следует, что $(\pi^3 \circ \iota)(f) = 0$ для произвольного нормализованного $f \in {}_M Z^3_N(K)$.

Пусть теперь $f \in Z^3(K)$ и $[f] \in \operatorname{Ker} \pi^3_*$, т. е. $\pi^3_M(f) = d\,\psi_M$, $\pi^3_N(f) = d\,\psi_N$ для некоторых $\psi_M \in C^3(M)$, $\psi_N \in C^3(N)$. Тогда f эквивалентен нормализованному коциклу, определяемому правой частью (47), которая не зависит от m_1, n_3, т. е. удовлетворяет (8). Это означает, что правая часть (47) задает элемент из ${}_M Z^3_N(K)$ и, следовательно, элемент из $E(M,N)$, что и завершает доказательство.

Следующий результат непосредственно следует из утверждения 3.

Теорема. *Определим отображение* $\tau\colon \operatorname{Ker}\pi^3_* \to {}_M Z^3_N(K)$ *следующим образом. Зафиксируем набор представителей всех элементов* $\operatorname{Ker}\pi^3_*$,

$$\mathcal{A} = \Big\{ f^\alpha \in Z^3(K) \mid \operatorname{Ker}\pi^3_* = \cup\,[f^\alpha];\ [f^\alpha] \neq [f^\beta],\ \alpha \neq \beta \Big\},$$

для каждого $f^\alpha \in \mathcal{A}$ *зафиксируем* $\psi^\alpha_M \in C^2(M)$, $\psi^\alpha_N \in C^2(N)$ *так, что* $\pi^3_M(f^\alpha) = d^{\,2}\psi^\alpha_M$, $\pi^3_N(f^\alpha) = d^{\,2}\psi^\alpha_N$, *положим*

$$\begin{aligned}
\tau([f^\alpha])(k_1,k_2,k_3) &= f^\alpha(n_1 \triangleleft m_2, n_2, m_3) + f^\alpha(n_1, m_2, n_2 \triangleright m_3) + \\
&+ f^\alpha((n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) + \\
&+ f^\alpha(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3, n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3)) - \\
&- f^\alpha(n_1 \triangleright m_2, n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3) - f^\alpha(n_1 \triangleleft m_2, n_2 \triangleright m_3, n_2 \triangleleft m_3) + \\
&+ \psi^\alpha_M(n_1 \triangleright m_2, (n_1 \triangleleft m_2)n_2 \triangleright m_3) - \psi^\alpha_M(m_2, n_2 \triangleright m_3) - \\
&- \psi^\alpha_N(n_1 \triangleleft m_2(n_2 \triangleright m_3), n_2 \triangleleft m_3) + \psi^\alpha_N(n_1 \triangleleft m_2, n_2),
\end{aligned} \tag{51}$$

и, наконец, $\tau_*\colon \operatorname{Ker}\pi^3_* \to \mathrm{E(M,N)}$ *— отображение, индуцированное* τ. *Тогда* τ_* *— сечение* ι_* *в короткой точной последовательности*

$$0 \longrightarrow \Big(H^2(M) \oplus H^2(N)\Big)/\operatorname{Im}\pi^2_* \xrightarrow{\tilde\sigma_*} \mathrm{E(M,N)} \underset{\tau_*}{\overset{\iota_*}{\rightleftarrows}} \operatorname{Ker}\pi^3_* \longrightarrow 0, \tag{52}$$

где $\tilde\sigma_*$ *— отображение, индуцированное* σ_* *в* (10).

***Следствие* 2.** *Пусть* $\tilde\sigma_*$ *и* τ_* *определены, как в теореме* 3. *Тогда*

$$\mathrm{E(M,N)} = \operatorname{Im}\tilde\sigma_* + \operatorname{Im}\tau_*.$$

4. Пример: группа $Z(3)$. В этом пункте верхний индекс используется для обозначения элементов групп, т. е. $k, k^1, \ldots \in K$, $m, m^1, \ldots \in M$, $n, n^1, \ldots \in N$.

Пусть $K = Z(3)$, — группа верхнетреугольных матриц порядка 3 с единицами на главной диагонали, т. е.

$$K = \{k(k_{12}, k_{23}, k_{13}) \mid k_{12}, k_{23}, k_{13} \in \mathbb{R}\},$$

$$k(k_{12}, k_{23}, k_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 1 & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$M = \big\{m(m_{23}, m_{13}) \mid m_{23}, m_{13} \in \mathbb{R}\big\}, \qquad m(m_{23}, m_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_{13} \\ 0 & 1 & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N = \{n(n_{12}) \mid n_{12} \in \mathbb{R}\}, \qquad n(n_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условия (1) выполнены. Кроме этого, для $m \in M$, $n \in N$

$$\begin{gathered} n(n_{12}) \triangleright m(m_{23}, m_{13}) = m(m_{23}, m_{13} + n_{12} m_{23}), \\ n(n_{12}) \triangleleft m(m_{23}, m_{13}) = n(n_{12}). \end{gathered} \tag{53}$$

Рассмотрим группы $H^n(K, \mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывных когомологий со значениями в $\mathbb{T}$. Как известно, короткая точная последовательность тривиальных K-модулей

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{T} \to 0$$

порождает длинную точную последовательность

$$\ldots \to H^n(K, \mathbb{Z}) \to H^n(K, \mathbb{R}) \to H^n(K, \mathbb{T}) \to H^{n+1}(K, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

и, поскольку группа K связна и коцепи — непрерывные функции, группы $H^n(K, \mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, тривиальны, следовательно, группы $H^n(K, \mathbb{T})$ и $H^n(K, \mathbb{R})$ изоморфны. Кроме того, K — группа Ли, а значит [10], $H^n(K, \mathbb{R})$ совпадает с $H^n_{\text{diff}}(K, \mathbb{R})$ — соответствующей группой бесконечно дифференцируемых когомологий. Кроме того, максимальная компактная подгруппа в K тривиальна и, согласно теореме ван Эста [10], $H^n(K, \mathbb{R})$ и $H^n(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, изоморфны, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли группы K, а $\mathbb{R}$ — тривиальный $\mathfrak{k}$-модуль.

Аналогично, группы $H^2(M, \mathbb{T})$, $H^2(N, \mathbb{T})$ изоморфны группам $H^2(\mathfrak{m}, \mathbb{R})$, $H^2(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ соответственно, где $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — соответствующие алгебры Ли групп Ли M, N.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$H^2(\mathfrak{k}, \mathbb{R}) = H^2(\mathfrak{m}, \mathbb{R}) \oplus H^2(\mathfrak{n}, \mathbb{R}).$$

Поэтому группа

$$\Big(H^2(M) \oplus H^2(N)\Big)/\mathrm{Im}\, \pi^2_*$$

тривиальна.

Опишем теперь $H^3(K, \mathbb{R})$. Непосредственные вычисления показывают, что линейное пространство $H^3(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ одномерно и порождается элементом $F \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda^3 \mathfrak{k}, \mathbb{R})$, определенным посредством $F(Y_{12}, X_{23}, X_{13}) = 1$, где Y_{12} и X_{23}, X_{13} — соответствующие матричные единицы, являющиеся базисными элементами в $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно и удовлетворяющие коммутационным соотношениям в $\mathfrak{k}$:

$$[Y_{12}, X_{13}] = 0, \qquad [Y_{12}, X_{23}] = X_{13}, \qquad [X_{13}, X_{23}] = 0.$$

Вводя координаты a_{ij}, $1 < i < j < 3$, на K посредством $a_{ij}(k) = k_{ij}$, левоинвариантную дифференциальную 3-форму на K, соответствующую F, записываем в виде

$$\omega = da_{12} \wedge da_{23} \wedge da_{13}. \tag{54}$$

Поэтому [10], рассматривая стандартный 3-симплекс Δ^3 в $\mathbb{R}^3$ с координатами (t_1, t_2, t_3), т. е.

$$\Delta^3 = \Big\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, 0 \le t_1, t_2, t_3 \le 1,\ t_1 + t_2 + t_3 \le 1\Big\},$$

полагая

$$s_1(t_1) = t_1, \qquad s_2(t_1, t_2) = \frac{t_2}{1 - t_1}, \qquad s_3(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_3}{1 - t_1 - t_2}$$

и определяя отображение $\gamma_t \colon K \to K$ для каждого $t \in [0, 1]$ посредством

$$\gamma_t(k) = tk + (1 - t)e, \tag{55}$$

где элементы $k, e \in K$ рассматриваются как матрицы, а e — единица в K, для фиксированных $k^1,\ k^2,\ k^3 \in K$ получаем сингулярный 3-симплекс $\sigma(k^1, k^2, k^3) \colon \Delta^3 \to \to K$, определенный посредством формулы

$$\sigma(k^1, k^2, k^3)(t_1, t_2, t_3) = \gamma_{s_1(t_1)}\big(k^1 \gamma_{s_2(t_1,t_2)}\big(k^2 \gamma_{s_3(t_1,t_2,t_3)}(k^3)\big)\big). \tag{56}$$

Следовательно, 3-коцикл $f \in Z^3(K, \mathbb{R})$ можно найти как [10]

$$f(k^1, k^2, k^3) = \int\limits_{\sigma(k^1,k^2,k^3)} \omega.$$

Имеем

$$(da_{12} \wedge da_{23} \wedge da_{13})(\sigma(k^1, k^2, k^3)) =$$

$$= \begin{vmatrix} k^1_{12} & k^1_{23} & k^1_{13} \\ k^2_{12} & k^2_{23} & k^2_{13} + k^1_{12}k^2_{23} \\ k^3_{12} & k^3_{23} & k^3_{13} + k^1_{12}k^3_{23} + k^2_{12}k^3_{23} \end{vmatrix} dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3,$$

где $k^i = k^i(k^i_{12}, k^i_{23}, k^i_{13})$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно,

$$f(k^1, k^2, k^3) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} k^1_{12} & k^1_{23} & k^1_{13} \\ k^2_{12} & k^2_{23} & k^2_{13} + k^1_{12}k^2_{23} \\ k^3_{12} & k^3_{23} & k^3_{13} + k^1_{12}k^3_{23} + k^2_{12}k^3_{23} \end{vmatrix}.$$

Непосредственно видно, что $f \in \operatorname{Ker} \pi^3$, поэтому выберем $\psi_M \equiv 0,\ \psi_N \equiv 0$. Теперь, используя (51), (53), для $k^i = m^i n^i$, $i = 1, 2, 3$, получаем

$$\tau(f)(k^1, k^2, k^3) = \frac{1}{2}\, n^1_{12} \begin{vmatrix} m^2_{23} & m^2_{13} \\ m^3_{13} & m^3_{13} + n^2_{12} m^3_{23} \end{vmatrix}.$$

Поэтому из (9) следует

$$u(n^1, m^2, m^3) = \alpha\, n^1_{12} \begin{vmatrix} m^2_{23} & m^2_{13} \\ m^3_{13} & m^3_{33} \end{vmatrix} \mod \mathbb{Z}, \qquad v(n^1, n^2, n^3) = 0,$$

где $n^1 = n(n^1_{12})$, $m^i = m(m^i_{23}, m^i_{13})$, $i = 2, 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Авторы выражают благодарность А. А. Калюжному за многочисленные полезные обсуждения результатов статьи.

1. *Кац Г. И.* Расширения групп, являющиеся кольцевыми группами // Мат. сб. – 1968. – **76**, № 3. – С. 473 – 496.
2. *Baaj S., Skandalis G.* Transformations pentagonales // C. r. Acad. sci. Sér. I. – 1998. – **327**. – P. 623 – 628.
3. *Vaes S., Vainerman L.* Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction // Adv. Math. – 2003. – **175**, № 1. – P. 1 – 101.
4. *Vaes S., Vainerman L.* On low-dimensional locally compact quantum groups // Locally Compact Quantum Groups and Groupoids: Proc. meeting Theor. Phys. and Math. / IRMA Lect. Math. and Math. Phys. – 2003. – P. 127 – 187.
5. *Majid S.* Foundations of quantum group theory. – Cambridge Univ. Press, 1995.
6. *Baaj S., Skandalis G., Vaes S.* Measurable Kac cohomology for bicrossed products // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, № 4. – P. 1497 – 1524.
7. *Masuoka A.* Extensions of Hopf algebras and Lie bialgebras // Ibid. – 2000. – **352**, № 8. – P. 2837 – 3879.
8. *Калюжный А. А., Подколзин Г. Б., Чаповский Ю. А.* Построение коциклов для двойного скрещенного произведения групп Ли // Функцион. анализ и его прил. – 2006. – **40**, № 2. – С. 70 – 73.
9. *Калюжный А. А., Подколзин Г. Б., Чаповский Ю. А.* Нахождение коциклов в конструкции двойного скрещенного произведения групп Ли // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1510 – 1522.
10. *Гишарде А.* Когомологии топологических групп и алгебр Ли. – М.: Мир, 1984.
11. *Chapovsky Yu. A., Kalyuzhnyi A. A., Podkolzin G. B.* On the group of extensions for the bicrossed product construction for a locally compact group // Algebra and Discrete Math. – 2004. – **3**. – P. 12 – 19.

Получено 08.08.08