УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

РІВНЯННЯ КІРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА ДЛЯ ҐРАТКОВОЇ КВАНТОВОЇ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ З БАГАТОЧАСТИНКОВИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ ВЗАЄМОДІЇ

For a Gibbsian system of quantum one-dimensional oscillators on the d-dimensional hyper-cubic lattice, interacting via superstable pair and manybody finite-range potentials, the existence of a solution of the (lattice) Kirkwood – Salsburg equation for correlation functions, depending on Wiener paths, is proved. Some of the manybody potentials may be nonpositive.

Для гиббсовской системы квантовых одномерных осцилляторов на d-мерной гиперкубической решетке, взаимодействующих благодаря суперустойчивому четному и многочастичным потенциалам финитного действия, доказано существование решения (решеточного) уравнения Кирквуда – Зальцбурга для корреляционных функций, зависящих от винеровских траекторий. Некоторые многочастичные потенциалы могут быть неположительными.

1. Вступ. Будемо розглядати у термінах великого канонічного ансамблю рівноважну (гіббсівську) систему квантових одновимірних осциляторів, координати яких $q_x \in \mathbb{R}$ індексуються вузлами ґратки $\mathbb{Z}^d$ з гамільтоніаном

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2}\sum_{x\in\Lambda}\partial_x^2 + U_c(q_\Lambda), \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial q_x},$$

та потенціальною енергією

$$U_c(q_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} u(q_x) + U(q_\Lambda),$$

$$U(q_\Lambda) = \sum_{S\subseteq\Lambda} u_{0;S}(q_S) + \sum_{x\in\Lambda}\left(\sum_{Z\subseteq\Lambda\setminus x} u'_{x;Z}(q_x, q_Z)\right)^2 = U_0(q_\Lambda) + U'(q_\Lambda), \qquad (1.1)$$

де підсумовування проводиться за підмножинами Λ зі скінченним число вузлів $|\Lambda|$, $u_{x;Z} = 0$, $|Z| > \bar{n} > 1$, $u_{0,S} = 0$, $|S| = 1$, $u_{0;S}$ є $|S|$-нарним (бінарним або парним, тернарним, $\ldots$) чи $|S|$-частинковим додатним потенціалом, $\frac{3}{4}q^{2n} \le u(q) \le q^{2n}$, $1 < n \in \mathbb{Z}^+$, U визначає енергію взаємодії. Якщо $X = x_{(l)} = (x_1, \ldots, x_l)$, то $u_X(q_X) = \frac{1}{l\,!}u_{x_{(l)}}(q_{x_1}, \ldots, q_{x_l})$. У простих випадках ці функції є симетричними окремо по $x_1, \ldots, x_l$ та $q_{x_1}, \ldots, q_{x_l}$. Для обчислення суми по X слід врахувати, що спочатку підсумовування проводиться по $x_1 \neq, \ldots, \neq x_l$, $x_j \in \Lambda$, а потім по l від 2 до $\max|X|$. Ми припускаємо, що всі потенціали $u_{x,Z}$, за винятком парного, мають скінченну дію, а також деякі з них не є додатними (якщо всі вони додатні, то вираз для U можна подати так, що у ньому будуть фігурувати нові $u_{0,S}$ та нульова U'). Функції $u'_{x;x_1,\ldots,x_l}(q_x, q_{x_1}, \ldots, q_{x_l})$ можуть бути не симетричними по q_x, q_{x_j}. Наприклад, $u'_{x;x_1,\ldots x_l}(q_x, q_{x_1}, \ldots, q_{x_l}) = \frac{g}{\sqrt{2}}J'_{x,x_1,\ldots x_l}\partial_x u^0(q_x, q_{x_1}, \ldots, q_{x_l})$, де J, u^0 — симетричні функції. Цей вибір відповідає $U'(q_\Lambda) = 2^{-1}g^2\sum_{x\in\Lambda}(\partial_x U^0(q_X))^2$, $U^0(q_\Lambda) = \sum_{S\subseteq\Lambda} u^0_S(q_S)$, $u^0_S = 0, |S| = 1$. Зазначимо, що штрихи не означають диференціювання.

Мотивацією до розгляду таких систем є той факт, що серед них є (квазіінтегровні) системи з повною потенціальною енергією

$$U_c(q_\Lambda) = 2^{-1} \sum_{x \in \Lambda} \left[g^2 (\partial_x U_c^0(q_X))^2 - g \partial_x^2 U_c^0(q_X) \right],$$

у яких основний стан пропорційний $\exp\left\{-gU_c^0(q_\Lambda)\right\}$, $U_c^0(q_\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda} u^0(q_x) + U^0(q_\Lambda)$. Легко перевірити, що відповідний гамільтоніан визначається як $H_\Lambda = 2^{-1} \sum_{x \in \Lambda} \mathcal{Q}_x^* \mathcal{Q}_x$, $\mathcal{Q}_x = \partial_x + g \partial_x U_c^0(q_X)$.

У роботі [1] було розглянуто системи (1.1) у випадку тільки ненульового парного потенціалу $u'_{x,y}(q_x, q_y) = J'_{x-y} u'(q_x, q_y)$ (парна та тернарна взаємодія) та обчислено кореляційні функції канонічного ансамблю у термодинамічній границі у термінах полімерних кластерних розкладів. Для доведення їх збіжності було використано рекурентне співвідношення Кірквуда – Зальцбурга (КЗ) на просторі вінерівських траєкторій із комплексним парним потенціалом. До цієї роботи кореляційні функції канонічного ансамблю подібних рівноважних квантових систем розглядались у випадку найпростіших ненульових парних потенціалів $\phi_{0;x,y}(q_x, q_y)$ у роботах [2 – 4]. У цій статті ми досліджуємо рівняння КЗ для редукованих матриць щільності великого канонічного ансамблю.

Рівноважні середні оператора множення F_X на функцію $F_X(q_X)$ задано таким чином:

$$\langle F_X \rangle_\Lambda = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subseteq \Lambda \setminus X} z^{|X|+|Y|} Tr(F_X e^{-\beta H_{X \cup Y}}) = \int F_X(q_X) \rho^\Lambda(q_X | q_X) dq_X,$$

$$\rho^\Lambda(q_X | q'_X) = \Xi_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subseteq \Lambda \setminus X} z^{|Y|+|X|} \int (e^{-\beta H_{X \cup Y}})(q_X, q_Y; q'_X, q_Y) dq_Y,$$

$$\Xi_\Lambda = \sum_{Y \subseteq \Lambda} z^{|Y|} Tr(e^{-\beta H_Y}),$$

де інтегрування проводиться за мірою Лебега по просторах відповідно $\mathbb{R}^{|X|}$, $\mathbb{R}^{|Y|}$, z — активність (термодинамічний параметр), β — обернена температура, а $\rho^\Lambda(q_X | q'_X)$ — редуковані матриці щільності (РМЩ) великого канонічного ансамблю. Головна мета теорії – знайти редуковані матриці щільності у термодинамічній границі $\Lambda = \mathbb{Z}^d$. Це є нетривіальною задачею у випадку, коли потенціали $u_{0;S}$, $u'_{x;Z}$ є трансляційно-інваріантними на ґратці, оскільки і знаменник, і чисельник у виразі для РМЩ розбігаються у цій границі. Саме з такими потенціалами ми будемо мати справу.

Матриці $\rho^\Lambda(q_X | q'_X)$ є інтегралами за умовною мірою Вінера гіббсівських кореляційних функцій $\rho = \left\{\rho^\Lambda(w_X), X \subset \mathbb{Z}^d\right\}$ на вінерівських траєкторіях із траєкторною потенціальною енергією $U_c(w_\Lambda) = \beta^{-1} \int_0^\beta U_c(w_\Lambda(\tau)) d\tau$, де $\omega_X = (w_x, x \in X)$ — набір вінерівських траєкторій, які належать імовірнісному простору Ω_0 вінерівського процесу та з імовірністю одиниця є неперервними функціями на $\mathbb{R}^+$. Далі ми будемо використовувати умовну міру Вінера $P^\beta_{q,q}(dw)$, яка зосереджена на траєкторіях, що виходять у початковий момент з точки q та повертаються до неї у момент β, та міру Вінера $P_q(dw)$, яка зосереджена на траєкторіях, що виходять у початковий момент з точки q. Нагадаємо, що міра Вінера визначає гауссівський марковський процес, який породжується щільністю імовірності переходу $P_0^t(q-q') = (2\pi t)^{-1/2} e^{-((q-q')^2)/2t}$, що збігається з ядром напівгрупи, генератор якої $-\dfrac{1}{2}\partial^2$.

Можна лінеаризувати вираз для U' з допомогою введення нових вінерівських траєкторій w_x^* та стохастичного інтеграла, що породжує багаточастинковий потенціал

$$u_{*(Z)}(\omega_Z) = (\beta|Z|)^{-1}\sqrt{2}\sum_{x\in Z}\int\limits_0^\beta u'_{x;Z\setminus x}(w_x(\tau), w_{Z\setminus x}(\tau))dw_x^*(\tau).$$

Це буде зроблено так само, як і в [1] (див. додаток), з допомогою перетворення типу Фур'є. Нова гіббсівська система характеризується комплексною потенціальною енергією $U(\omega_X) = U_0(w_X) + iU_*(\omega_X)$, де $\omega_X = (\omega_x = (w_x, w_x^*),\ x\in X)$, $U_0(w_\Lambda) = \beta^{-1}\displaystyle\int_0^\beta U_0(w_\Lambda(\tau))d\tau$, $U_*(\omega_\Lambda) = \sum_{Z\subseteq\Lambda} u_{*(Z)}(\omega_Z)$, $\beta \geq 0$. У випадку ненульового тільки парного потенціалу $u'_{x,y}$ ми зводимо таким чином гіббсівську систему з парною та простою тернарною взаємодією до гіббсівської системи з парним, але комплексним потенціалом взаємодії. Цей прийом дає змогу у деяких випадках розв'язувати комплексне рівняння КЗ для не додатних потенціалів $u'_{x;Z}$ фінітної дії. Дійсні рівняння КЗ зі змінними w_x для таких потенціалів не розв'язані.

РМЩ ґраткової квантової системи осциляторів із потенціальною енергією (1.1) мають вигляд

$$\rho^\Lambda(q_X \mid q'_X) = \bar{z}^{-|X|}\int e^{-\beta\sum_{x\in X} u(w_x)}\rho^\Lambda(w_X, w_X^* \mid z_c)P_0(dw_X^*)P^\beta_{q_X,q'_X}(dw_X), \tag{1.2}$$

де

$$\rho^\Lambda(\omega_X \mid z) = \Xi_\Lambda^{-1}\sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X} z^{|X|+|Y|}\int e^{-\beta U(\omega_{X\cup Y})}P(d\omega_Y), \tag{1.2$'$}$$

інтегрування проводиться відповідно по $\Omega_0^{2|X|}$ та $(\mathbb{R}\times\Omega_0^2)^{|Y|}$, всі міри є добутком одновузлових мір, як $P(d\omega_Y) = \prod_{y\in Y} P(d\omega_y),\ z_c = z\bar{z},\ \bar{z} = \displaystyle\int e^{-\beta u(w)}dqP^\beta_{q,q}(dw)$,

$$u(w) = \beta^{-1}\int\limits_0^\beta u(w(\tau))d\tau, \qquad P(d\omega) = P_0(dw^*)P'(dw),$$

$$P'(dw) = \bar{z}^{-1}e^{-\beta u(w)}dqP^\beta_{q,q}(dw).$$

(Кореляційні функції при $X \not\subset \Lambda$ можна покласти рівними нулю.) Визначення міри P' спрощується тому, що умовна міра Вінера $P^\beta_{q,q}(dw)$ є трансляційно-інваріантною: $\displaystyle\int P^\beta_{q,q}(dw)f(w) = \int P^\beta_{0,0}(dw)f(w+q)$. Для простоти позначень будемо нехтувати залежністю кореляційних функцій від z.

Тепер для визначення РМЩ у термодинамічній границі достатньо визначити цю границю для $\rho^\Lambda(\omega_X)$ та довести, що інтеграл в (1.2) збігається для граничних функцій. Ми це зробимо з допомогою ґраткового квантового рівняння КЗ

$$\rho(\omega_X) = z \sum_{Z\subseteq X^c} \int K(\omega_x \mid \omega_{X\backslash x}; \omega_Z)\times$$

$$\times \left[\rho(\omega_{X\backslash x\cup Z}) - \int P(d\omega_x)\rho(\omega_{X\cup Z})\right] P(d\omega_Z), \quad |X| \geq 2, \tag{1.3}$$

де для $X = x$ перший доданок з $|Z| = \varnothing$ збігається з одиницею, інтегрування проводиться по просторах $\mathbb{R}\times\Omega_0^2$, $(\mathbb{R}\times\Omega_0^2)^{|Z|}$, $X^c = \mathbb{Z}^d\backslash X$,

$$K(\omega_x|\omega_{X\backslash x}; \omega_Y) = \sum_{S\subseteq Y} (-1)^{|Y\backslash S|} e^{-\beta W(\omega_x|\omega_{X\backslash x}, \omega_S)},$$
$$W(\omega_x|\omega_Y) = U(\omega_x, \omega_Y) - U(\omega_Y). \tag{1.4}$$

Ґраткове рівняння КЗ виводиться так само, як і подібне рівняння для класичного ґраткового газу [5]. Воно є рівнянням резольвентного типу та має абстрактний вигляд

$$\rho = zK\rho + z\alpha, \tag{1.5}$$

де K задається правою частиною (1.3), у який для $X = x$ перший доданок з $|Z| = \varnothing$ дорівнює нулю, $\alpha(\omega_X) = \delta_{|X|,1} = 0$, $|X| \neq 1$, $\delta_{|X|,1} = 1$, $|X| = 1$.

Будемо шукати розв'язок рівняння КЗ в $\mathbb{E}_{\xi,f}$ — банаховому просторі вимірних функцій із нормою

$$\|F\|_{\xi,f} = \max_{|X|} \xi^{-|X|} \operatorname*{ess\,sup}_{w_X} \exp\left\{-\sum_{x\in X} f(\omega_x)\right\} \big|F_X(\omega_X)\big|.$$

Ця норма буде гарантувати існування граничних РМЩ. Ми встановимо, що для певного класу короткодійових потенціалів в (1.1) існують функції f та $G(\xi,\beta)$ такі, що для норми оператора КЗ у цьому просторі справджується оцінка

$$\|K\|_{\xi,f} \leq (\xi^{-1} + \|e^f\|_1) e^{G(\xi,\beta)}, \tag{1.6}$$

де

$$G(\xi,\beta) = \xi g_1 + \theta\zeta \left(\frac{g_0\xi}{1+\zeta}\right)^{\frac{1+\zeta}{\zeta}}, \qquad \|e^f\|_l^l = \int e^{lf(\omega)} P(d\omega), \quad \zeta > 0, \quad \theta \geq 0,$$

ζ фігурує у виразі для f, а g_0, g_1 є лінійними за нормами $N_l = \|e^f\|_l$, $l = 1, 2$, $N' = \|v_1 e^f\|_1$.

Наші результати можна застосувати до вищезгаданої системи з основним станом $\exp\left\{-gU_c^0(q_\Lambda)\right\}$ тільки у тому випадку, коли $U_c^0(q_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} u^0(q_x) - \sum_{x\neq y\in\Lambda} J^0_{x-y} q_x q_y$, де $u^0(q)$ — додатний поліном та $J^0_{x-y} \geq 0$. При цьому слід скористатись рівністю $qq'^k + q'q^k = (q^{2n'} + q'^{2n'}) - Q(q,q')(q-q')^2$, де $Q \geq 0$, $k+1 = 2n'$, $k, n' \in \mathbb{Z}^+$ (див. додаток С у [9]).

У наступному пункті ми сформулюємо основний результат — дві теореми та лему, які будуть доведені у третьому пункті. У додатку ми доведемо (1.2).

2. Основний результат. Досить просто довести наступну теорему.

Теорема 2.1. *Нехай $\phi_{0;S} \geq 0$ і всі потенціали мають скінченну дію. Тоді оператор K є обмеженим у просторі $\mathbb{E}_{\xi,0} = \mathbb{E}_\xi$, а єдиний розв'язок рівняння* (1.5) *у ньому зображується рядом із комплексним z*

$$\rho = z \sum_{n \geq 0} (zK)^n \alpha, \tag{2.1}$$

збіжним при $|z| \leq \|K\|_\xi^{-1}$. Оцінка (1.6) *також виконується з $\theta = 0$, $g_1 = 2|B_0(R)|$, де $B_0(R)$ — гіперкуля радіуса R з центром у початку координат.*

Ми припускаємо, що для парних потенціалів, коли всі інші багаточастинкові потенціали u_0, u' дорівнюють нулю, виконуються умови

$$\big|u_{0;x,y}(q_x, q_y)\big| \leq \frac{J_{x-y}}{2}(q_x^{2n_0} + q_y^{2n_0}), \qquad J_x = J_{-x}, \tag{2.2}$$

$$u'_{x,y}(q_x, q_y) = J'_{x-y} u'(q_x, q_y), \quad J'_x = J'_{-x}, \tag{2.3}$$

$$u'^2(q_x, q_y) \leq \frac{1}{2}(q_x^{2n_1} + q_y^{2n_1}). \tag{2.4}$$

Дія потенціалів буде визначатись з допомогою норми $\|J\|_1 = \sum_y J_y$, де підсумовування проводиться по $\mathbb{Z}^d$, та норми $\|\sqrt{J'}\|_1$. Функція f, що визначає норму в (1.6), має вигляд

$$f(\omega) = \gamma_0 \beta^r v_*(\omega) + \gamma v_{1+\zeta}(w), \quad 1 < 1 + \zeta \leq \frac{n}{n_0}, \quad \gamma_0, \gamma > 0,$$

де

$$v_{1+\zeta}(w) = \int\limits_0^\beta v^{1+\zeta}(w(\tau)) d\tau, \qquad v_*^2(\omega) = \int |u_*(\omega, \omega')|^2 P(d\omega'),$$

$$u_*(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f_*(w_x, w_y \mid w_x^*) + f_*(w_y, w_x \mid w_y^*)\big),$$

$$f_*(w_x, w_y | w_x^*) = \beta^{-1} \int\limits_0^\beta dw_x^*(\tau) u'\big(w_x(\tau), w_y(\tau)\big),$$

$v(q) = q^{2n_0}$, $n_0 < n$, а числа γ_0, γ будуть визначені більш точно у другій теоремі. Неважко показати, що v_*, f_* — вимірні функції (див. додаток). З (3.5), (3.6) при $m = 1$ та зворотного твердження до теореми Фубіні (див. зауваження 1 в [6, с. 45]) випливає, що функція $\big|u_*(\omega, \omega')\big|^2$ є інтегровною за мірою $P(d\omega)P(d\omega')$. З теореми Фубіні [6] випливає, що $v_*^2(\omega)$ — функція, інтегровна по $P(d\omega)$. Ми будемо використовувати також зворотне твердження до теореми Фубіні в доведенні леми 2.1 без посилання на нього.

Лема 2.1. *Нехай $n_1/n < 1$. Тоді для довільного додатного числа γ_0*

$$\int e^{\gamma_0 \beta^r v_*(w, w^*)} P_0(dw^*) \leq \kappa_{\gamma_0} \left[\sqrt{I_P} + \exp\left\{\frac{1}{4}\int\limits_0^\beta w^{2n}(\tau) d\tau\right\}\right],$$

$$I_P=\int P'(dw)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta w^{2n}(\tau)d\tau\right\},$$

де κ_{γ_0} *не залежить від* w *та є цілою функцією* $\beta^{2r-1-n_1/n}$.

Зазначимо також, що інтеграл в останній формулі є скінченним завдяки умові $\frac{3}{4}q^{2n}\le u(q)$.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* (2.2) – (2.4), *умови леми* 2.1 *та* $u_{0;x,y}\ge 0$, $u_{0;S}=0$, $|S|\ge 3$, $u'_{x;Z}=0$, $|Z|\ge 2$. *Нехай також* $\gamma<\frac{1}{8}$ *тільки при* $\zeta=\frac{n-n_0}{n_0}$, $\|J\|_1<\infty$ *та* $\gamma_0\ge\left\|\sqrt{|J'|}\,\right\|_1$. *Тоді оператор* K *є обмеженим у просторі* $\mathbb{E}_{\xi,f}$, *єдиний розв'язок рівняння* (1.5) *у ньому зображується рядом* (2.1), *збіжним при* $|z|\le\|K\|^{-1}_{\xi,f}$, *та виконується оцінка* (1.6) *з* $\theta=1$, $g_0=2^{-1}\|J\|_1N_1(\gamma^{-1}\beta^\zeta)^{1/(1+\zeta)}$, $g_1=2^{-1}\|J\|_1N'+2\beta^{1-r}N_2\left\|\sqrt{|J'|}\,\right\|_1$.

Має місце також наступний результат, який легко випливає з леми 2.1 та теореми 2.2.

Наслідок. *Нехай* ρ *є розв'язком рівняння КЗ, в якому* z_c *фігурує замість* z, *у просторі* $\mathbb{E}_{\xi,f}$ *та виконуються умови теореми* 2.2. *Тоді для граничних РМЩ, що визначаються формулою* (1.2) *при* $\Lambda=\mathbb{Z}^d$, *справджується нерівність*

$$\rho(q_X|q'_X)\le\left(\xi\bar{z}^{-1}\kappa_{\gamma_0}\kappa'_\gamma\left[1+\sqrt{I_P}\right]\right)^{|X|}\|\rho\|_{\xi,f}\prod_{x\in X}P_0^t(q_x-q'_x),\tag{2.5}$$

де $\kappa'_\gamma=\max\limits_{a\ge 0}\exp\left\{-\frac{a}{8}+\gamma\beta^{1-n_0(1+\zeta)/n}a^{n_0(1+\zeta)/n}\right\}$.

При виведенні (2.5) ми скористались нерівністю $\frac{3}{4}q^{2n}\le u(q)$ та нерівністю Гельдера

$$v_{1+\zeta}\le\beta^{1-\frac{n_0(1+\zeta)}{n}}\left(\int\limits_0^\beta w^{2n}(\tau)d\tau\right)^{\frac{n_0(1+\zeta)}{n}}.\tag{2.6}$$

Неважко отримати аналог нерівності (2.5) і у випадку, розглянутому в теоремі 2.1, в якому права частина не містить κ_{γ_0}, κ'_γ та вінерівський інтеграл.

Залежність g_0, g_1 від β визначає залежність N_l, N' від β, яка встановлюється наступною лемою.

Лема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми* 2.2. *Тоді* $N'\le\bar{N}\beta^{1-n_0/n}$, $0\le\beta<\infty$, *та* $\bar{N}$, N_l — *обмежені функції* β *при* $r\ge\frac{1}{2}\left(1+\frac{n_1}{n}\right)$ *на обмеженому інтервалі.*

3. Доведення. Неважко показати, що для норми оператора КЗ має місце нерівність

$$\|K\|_{\xi,f}\le(\xi^{-1}+\|e^f\|_1)\operatorname*{ess\,sup}_{X,\omega_X}e^{-f(\omega_x)}\times$$

$$\times\sum_{Y\subseteq X^c}\xi^{|Y|}\int|K(\omega_x|\omega_{X\backslash x},\omega_Y)|e^{\sum_{y\in Y}f(\omega_y)}P(d\omega_Y).\tag{3.1}$$

Досить просто помітити, що у випадку додатних потенціалів $u_{0,S}$ справджується нерівність

$$\left|K(\omega_x \mid \omega_{X\setminus x}; \omega_Y)\right| \leq 2^{|Y|}.$$

Проте цієї нерівності недостатньо для доведення обмеженості оператора КЗ. Припустимо, що потенціали мають скінченну дію радіуса R, тобто для будь-якого $x \in X$ має місце $u'_X(\omega_X) = u_{0;X}(\omega_X) = 0$, $|x - x'| \geq R$, $x' \in X\setminus x$, $|x - x'|$ — евклідова відстань між двома вузлами. Це означає, що $W(\omega_x \mid \omega_{X\setminus x}, \omega_S) = W(\omega_x \mid \omega_{X\setminus x}, \omega_{S\setminus y})$, $|y - x| \geq R$, $y \in S$. Звідси, використовуючи наявність множника $(-1)^{|Y\setminus S|}$ у виразі для ядра K, отримуємо

$$\left|K(\omega_x \mid \omega_{X\setminus x}; \omega_Y)\right| \leq 2^{|Y|}\chi_{B_x(R)}(Y),$$

де $\chi_A(Y) = \prod_{y\in Y} \chi_A(y)$, $\chi_A(y)$ — характеристична функція множини $A \subset \mathbb{Z}^d$, а $B_x(R)$ — гіперкуля радіуса R з центром у вузлі x. Нехай $\|K\|_\xi = \|K\|_{\xi,0}$. Підставимо цю нерівність у праву частину нерівності (3.1). Тоді

$$\|K\|_\xi \leq (1 + \xi^{-1})e^{2|B_0(R)|\xi}.$$

Теорему 2.1 доведено.

***Доведення теореми* 2.2.** Будемо розглядати парну комплексну взаємодію, що визначається парним комплексним потенціалом $u_{(x,y)}$:

$$u_{(x,y)}(\omega, \omega') = u_{0(x,y)}(w, w') + iu_{*(x,y)}(\omega, \omega'),$$

де

$$u_{0(x,y)}(w, w') = \beta^{-1} \int\limits_0^\beta u_{0;x,y}(w(\tau), w'(\tau))d\tau,$$

$$u_{*(x,y)}(\omega_x, \omega_y) = J'_{x-y} u_*(\omega_x, \omega_y).$$

Ядра КЗ мають вигляд

$$K(\omega_x \mid \omega_{X\setminus x}, \omega_Y) = \exp\left\{-\beta \sum_{x'\in X\setminus x} u_{(x,x')}(\omega_x, \omega_{x'})\right\} \prod_{y\in Y} \left(e^{-\beta u_{(x,y)}(\omega_x,\omega_y)} - 1\right).$$

З додатності дійсної частини парного потенціалу випливає важлива нерівність

$$\sum_{Y\subseteq X^c} \xi^{|Y|} \int |K(\omega_x|\omega_{X\setminus x}, \omega_Y)e^{\sum_{y\in Y} f(\omega_y)} \,|\, P(d\omega_Y) \leq$$

$$\leq \prod_{y\neq x} \left(1 + \xi \int |e^{-\beta u_{(x,y)}(\omega_x,\omega_y)} - 1|e^{f(\omega_y)} P(d\omega_y)\right), \tag{3.2}$$

а також

$$\left|e^{-\beta u_{(x,y)}(\omega_x,\omega_y)} - 1\right| \leq \left|e^{-\beta u_{0(x,y)}(\omega_x,\omega_y)} - 1\right| + \left|e^{-i\beta u_{*(x,y)}(\omega,\omega')} - 1\right| \leq$$

$$\leq \left|e^{-\beta u_{0(x,y)}(\omega_x,\omega_y)} - 1\right| + 2\beta\left|u_{*(x,y)}(\omega_x, \omega_y)\right| \leq$$

$$\leq \beta\Big(\big|u_{0(x,y)}(\omega_x,\omega_y)\big| + 2\big|u_{*(x,y)}(\omega_x,\omega_y)\big|\Big).$$

Маємо

$$\beta\big|u_{0(x,y)}(w,w')\big| \leq 2^{-1}J_{x-y}(v_1(w)+v_1(w')).$$

Враховуючи, що $u_{0(x,y)}$, v_s залежать тільки від w, w', отримуємо

$$\int \beta\big|u_{0(x,y)}(\omega,\omega')e^{f(\omega')}\big|P(d\omega') \leq 2^{-1}J_{x-y}(N_1v_1(w)+N').$$

З нерівності Шварца випливає, що

$$\int \big|u_{*(x,y)}(\omega_x,\omega_y)\big|e^{f(\omega_y)}P(d\omega_y) \leq$$

$$\leq \left[\int |u_{*(x,y)}(\omega_x,\omega_y)|^2P(d\omega_y)\right]^{\frac{1}{2}} N_2 \leq |J'_{x-y}|v_*(\omega_x)N_2.$$

Отже, вираз під знаком добутку у правій частині (3.2) менший, ніж

$$1+\xi\big[2^{-1}J_{x-y}(N_1v_1(\omega)+N') + 2\beta|J'_{x-y}|N_2v_*(\omega_x)\big].$$

Останній вираз є меншим за

$$\exp\left\{\xi\left[2^{-1}J_{x-y}(N_1v_1(w)+N') + 2\beta^{1-r}\xi N_2\sqrt{|J'_{x-y}|} + \beta^r\sqrt{|J'_{x-y}|}v_*(\omega_x)\right]\right\}.$$

Тут ми використали нерівності $1+a+be^c \leq e^{a+b+c}$, $a,\ b,\ c \geq 0$, $a \leq e^a, a \geq 0$. З (3.1), (3.2) та цих нерівностей випливає, що

$$\|K\|_{\xi,f} \leq \big(\xi^{-1}+\|e^f\|_1\big)e^{\xi g_1}\max_{v_1\geq 0}\exp\Big\{-\gamma\beta^{-\zeta}v_1^{1+\zeta} - \xi 2^{-1}\|J\|_1N_1v_1\Big\}. \tag{3.3}$$

При цьому необхідно використати нерівність Гельдера $v_1^{1+\zeta}(w) \leq \beta^\zeta v_{1+\zeta}$. Максимум в (3.3) після заміни масштабу v_1 множником $(\gamma^{-1}\beta^\zeta)^{1/(1+\zeta)}$ збігається з $\max\limits_{v\geq 0} e^{-v^{1+\zeta}+g_0\xi v}$. Цей максимум легко обчислюється та дорівнює $\exp\left\{\zeta\left(\dfrac{g_0\xi}{1+\zeta}\right)^{(1+\zeta)/\zeta}\right\}$.

Теорему доведено.

***Доведення леми* 2.1**. З нерівностей Шварца та Гельдера випливає

$$\int v_*^m(\omega)P_0(dw^*) \leq \left[\int v_*^{2m}(\omega)P_0(dw^*)\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\int u_*^{2m}(\omega,\omega')P_0(dw^*)P(d\omega')\right]^{1/2}, \quad \omega=(w,w^*).$$

З останньої нерівності отримуємо

$$\int e^{\gamma_0\beta^r v_*(\omega)}P_0(dw^*) \leq 1+\sum_{m\geq 1}\frac{(\beta^{r-1}\gamma_0)^m}{m!}\left[\beta^{2m}\int u_*^{2m}(\omega,\omega')P_0(dw^*)P(d\omega')\right]^{1/2}. \tag{3.4}$$

Беручи до уваги співвідношення

$$u_*^{2m}(\omega,\omega') \le 2^{2m}\big[f_*^{2m}(w',w|w'^*) + f_*^{2m}(w,w' \mid w^*)\big],$$

$$\int \left(\int_0^\beta f(\tau)dw^*(\tau)\right)^{2m} P_0(dw^*) = 2^{-m}\frac{(2m)!}{m!}\left[\int_0^\beta f^2(\tau)d\tau\right]^m,$$

де $f(\tau) = u'(w(\tau), w'(\tau))$ та $f(\tau) = u'(w'(\tau), w(\tau))$, виводимо нерівності

$$\beta^{2m}\int u_*^{2m}(\omega,\omega')P_0(dw^*)P_0(dw'^*) \le 2^m\frac{(2m)!}{m!}\big[f_0^m(w,w') + f_0^m(w',w)\big], \quad (3.5)$$

в яких

$$f_0(w,w') = \int_0^\beta u'^2(w(\tau),w'(\tau))d\tau.$$

З (2.4) та нерівностей

$$f_0^m(w,w') \le v'^m(w) + v'^m(w'),$$

$$v'(w) = \int_0^\beta w^{2n_1}(\tau)d\tau \le \beta^{\frac{n-n_1}{n}}\left[\int_0^\beta w^{2n}(\tau)d\tau\right]^{n_1/n}$$

випливає (останню нерівність отримано з нерівності Гельдера), що

$$\int f_0^m(w,w')P'(dw') \le$$

$$\le \beta^{(1-n_1/n)m}\left(\frac{n_1 m}{en}\right)^{n_1 m/n}\left[\int P'(dw')e^{\frac12\int_0^\beta w'^{2n}(\tau)d\tau} + e^{\frac12\int_0^\beta w^{2n}(\tau)d\tau}\right]. \quad (3.6)$$

При цьому ми скористались нерівністю $\max\limits_{a\ge 0} a^m e^{-a} \le m^m e^{-m}$. З (3.4) – (3.6) випливає, що

$$\kappa_{\gamma_0} = 1 + 2\sum_{m\ge 1}\frac{\gamma_0^m}{m!}\left(\beta^{(2r-1-n_1/n)m}2^m\frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{2n_1 m}{en}\right)^{n_1 m/n}\right)^{1/2}.$$

Неважко зробити висновок, що ряд у правій частині збігається, якщо $\left(1+\dfrac{n_1}{n}\right)\dfrac12 <$ < 1. При цьому необхідно врахувати, що $e^{-m}m^m \le m! \le m^m$.

Лему доведено.

***Доведення леми* 2.2.** З леми 2.1 та (2.6) випливає, що $\left(\kappa_j^0 = \max\limits_{a\ge 0} a^j e^{-a}\right)$

$$N_l^l \le \kappa_{l\gamma_0}\kappa'_{l\gamma}(\sqrt{I_P} + I_P), \qquad N' \le \beta^{1-\frac{n_0}{n}}\kappa_{\gamma_0}\kappa'_\gamma\left(\sqrt{I_P} + 4^{n_0/n}\kappa^0_{n_0/n}I_P\right).$$

З $\dfrac34 q^{2n} \le u(q) \le q^{2n}$ виводимо

$$I_P \le I\left(\frac14\right)I^{-1}(1), \qquad I(s) = \int dq P_{q.q}^\beta(dw)\exp\left\{-s\int_0^\beta w^{2n}(\tau)d\tau\right\}. \quad (3.7)$$

Далі, з нерівності Голдена – Томпсона $\mathrm{Tr}\,(e^{A+B}) \leq \mathrm{Tr}\,(e^A e^B)$ маємо

$$I(s) \leq (2\pi\beta)^{-1/2} \int e^{-s\beta q^{2n}} dq = \beta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-sq^{2n}} dq, \qquad (3.8)$$

а з нерівності Йенсена —

$$I(s) \geq (2\pi\beta)^{-1/2} \int dq \exp \left\{ -s\sqrt{2\pi\beta} \int P^{\beta}_{q.q}(dw) \int\limits_0^{\beta} w^{2n}(\tau) d\tau \right\}.$$

При цьому ми взяли до уваги, що $P_0^{\beta}(0) = \int P^{\beta}_{q,q}(dw) = (2\pi\beta)^{-1/2}$. Далі, для інтеграла в останній формулі отримуємо нерівність

$$\int P^{\beta}_{q.q}(dw) \int\limits_0^{\beta} w^{2n}(\tau) d\tau = \int\limits_0^{\beta} \int P_0^{\tau}(q-q') q'^{2n} P_0^{\beta-\tau}(q'-q) dq' d\tau \leq$$

$$\leq 2^{2n} \int\limits_0^{\beta} \int P_0^{\tau}(q')(q'^{2n} + q^{2n}) P_0^{\beta-\tau}(q') dq' d\tau = (2\pi)^{-1/2}\sqrt{\beta}(2q)^{2n} + c_n^0.$$

При цьому ми скористались нерівністю $(q' - q + q)^{2n} \leq 2^{2n}(q^{2n} + (q-q')^{2n})$ та напівгруповою властивістю $P_0^t(q)$. Величина c_n^0 не залежить від q та є скінченною величиною при обмеженій β, оскільки

$$c_n^0 = 2^{2n} \int\limits_0^{\beta} \int P_0^{\tau}(q') q'^{2n} P_0^{\beta-\tau}(q') dq' d\tau \leq$$

$$\leq 2^{2n} \int\limits_0^{\beta} \left(\int (P_0^{\tau}(q'))^2 q'^{2n} dq' \right)^{1/2} \left(\int (P_0^{\beta-\tau}(q'))^2 q'^{2n} dq' \right)^{1/2} d\tau =$$

$$= \pi^{-1} 2^{2n-1} \left(\int e^{-q^2} q^{2n} dq \right) \int\limits_0^{\beta} \tau^n (\beta - \tau)^n d\tau.$$

Тут ми використали нерівність Шварца. Таким чином,

$$I^{-1}(s) \leq \sqrt{2\pi\beta} e^{\sqrt{2\pi\beta} c_n^0} \left(\int dq e^{-s\beta(2q)^{2n}} \right)^{-1} =$$

$$= \sqrt{2\pi} \beta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} e^{\sqrt{2\pi\beta} c_n^0} \left(\int dq e^{-s(2q)^{2n}} \right)^{-1}. \qquad (3.9)$$

Співвідношення (3.7) – (3.9) доводять лему.

Додаток. ***Виведення*** **(1.2).** Для введення траєкторних кореляційних функцій необхідно використати формулу Фейнмана – Каца (ФК), вивід якої ґрунтується на застосуванні формули Троттера [7] (теорема X.51)

$$(e^{-\beta H_X})(q_X;q'_X) = \int P^{\beta}_{q_X,q'_X}(dw_X)e^{-\beta U_c(w_\Lambda)}, \qquad U_c(w_\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} u(w_x) + U(w_\Lambda),$$

де інтегрування проводиться за $|X|$-кратним декартівським добутком $\Omega_0^{|X|}$ імовірнісного простору Ω_0 вінерівських траєкторій та $P^{\beta}_{q_X,q'_X}(dw_X) = \prod_{x\in X} P^{\beta}_{q_x,q'_x}(dw_x)$. Виведення формули ФК для необмежених збурень лапласіана є складнішим, ніж для випадку обмежених збурень, для яких її доведено в теоремі X.68 в [7]. Для застосування формули Троттера необхідно, щоб гамільтоніан був суттєво самоспряженим на перетині областей визначення лапласіана та його збурення. А це забезпечується твердженням у прикладі X.9.3 з [7], оскільки всі розглядувані потенціали є поліноміально обмеженими та $U \geq 0$.

Підставляючи формулу ФК у вираз для РМЩ, отримуємо

$$\rho^{\Lambda}(q_X|q'_X) = \bar{z}^{-|X|}\int e^{-\beta\sum_{x\in X} u(w_x)}\rho^{\Lambda}(w_X \mid z_c)P^{\beta}_{q_X,q'_X}(dw_X),$$

де

$$\rho^{\Lambda}(w_X \mid z) = \Xi_{\Lambda}^{-1}\sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X} z^{|X|+|Y|}\int e^{-\beta U(w_{X\cup Y})}P'(dw_Y),$$

та інтегрування під знаком суми по Y проводиться по $(\mathbb{R}\times\Omega_0)^{|Y|}$. Нехай $U'^2(q_x|q_{\Lambda\setminus x})$ — вираз під знаком суми по x у виразі для U_1, тоді

$$\exp\left\{-\int_0^{\beta} U'^2\big(w_x(\tau) \mid w_{\Lambda\setminus x}(\tau)\big)d\tau\right\} =$$

$$= \int \exp\left\{-i\sqrt{2}\int_0^{\beta}\sum_{Z\subseteq\Lambda\setminus x} u'_{x;Z}(w_x(\tau), w_Z(\tau))dw^*_x(\tau)\right\}P_0(dw^*_x).$$

В результаті

$$\exp\left\{-\int_0^{\beta} U'(w_\Lambda(\tau))d\tau\right\} =$$

$$= \int \exp\left\{-i\sqrt{2}\sum_{x\in\Lambda}\int_0^{\beta}\sum_{Z\subseteq\Lambda\setminus x} u'_{x;Z}(w_x(\tau), w_Z(\tau))dw^*_x(\tau)\right\}P_0(dw^*_\Lambda).$$

Остання формула доводить (1.2). При цьому ми скористались формулою

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{\beta} f^2(\tau)d\tau\right\} = \int \exp\left\{-i\int_0^{\beta} f(\tau)dw^*(\tau)\right\}P_0(dw^*).$$

Останню формулу, в якій мінус та уявну одиницю пропущено відповідно у лівій та правій частинах, доведено у [8]. Іншими словами, стохастичний інтеграл по w^* — це інтеграл функції f з узагальненим гауссівським процесом білого шуму. Він визначається як сильна границя збіжної послідовності рімановых сум циліндричних функцій у просторі квадратично інтегровних функцій. Сильна границя послідовності, збіжної у просторі квадратично інтегровних функцій, містить підпослідовність, збіжну майже скрізь до вимірної функції. Стохастичний інтеграл залежить ще від додаткових вінерівських траєкторій. Послідовність ріманових сум циліндричних функцій залежить також і від них. Отже, і гранична функція буде вимірною, оскільки міра Вінера зосереджена на множині неперервних траєкторій та ця послідовність збігається майже скрізь за всіма вінерівськими траєкторіями.

Зауваження. Результати [1] можна узагальнити на випадок $\tilde{v}(\omega) = f(\omega)$ (див. (1.4) в [1]).

1. *Скрипник В. І.* Про полімерні розклади для рівноважних систем осциляторів з тернарною взаємодією // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1532 – 1544.
2. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Minlos R. A., Rebenko O. L.* Small mass behaviour of quantum Gibbs states for lattice models with unbounded spins. – Uni. da Madeira, 1997. – (Preprint / UMa-CCM 22/97).
3. *Minlos R. A., Verbeure A., Zagrebnov V. A.* A quantum crystal model in the light-mass limit: Gibbs states. – Preprint KUL-TP-97/16.
4. *Park Y. M., Yoo H. J.* Uniqueness and clustering properties of Gibbs states for classical and quantum unbounded spin systems // J. Stat. Phys. – 1995. – **80**, № 1/2. – P. 223 – 271.
5. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 367 с.
6. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. А.* Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1967. – 219 с.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1978. – 395 с.
8. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
9. *Skrypnik W. I.* Long-range order in Gibbs classical linear oscillator systems // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 388 – 405.

Одержано 04.11.08