УДК 517.929.2; 517.925.4

В. Е. Круглов (Одес. нац. ун-т)

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

An effective algorithm for the construction of fundamental system of solutions of a finite-order difference equation is given. Formulas, in which all elements of this system are expressed via its one element, are found as well as a partial solution of a nonhomogeneous equation.

Наведено ефективний алгоритм побудови фундаментальної системи розв'язків лінійного різницевого рівняння скінченного порядку. Знайдено формули, в яких всі елементи цієї системи подано через її один елемент, а також частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

1. Для линейного разностного уравнения первого порядка

$$l_{k+1} = a_k l_k + g_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

формула общего решения имеет вид [1 – 3]

$$l_{k+1} = \varphi_{0,k+1} l_0 + \sum_{j=0}^{k} \frac{g_{j+1}}{\varphi_{0,j+1}} \varphi_{0,k+1},$$

где $\varphi_{0,j+1} = a_0, a_1, \ldots, a_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, l_0 — произвольная постоянная.

Запишем эту формулу следующим образом:

$$l_{k+1} = \varphi_{0,k+1} l_0 + \frac{\partial \varphi_{0,k+1}}{\partial a_0} g_1 + \frac{\partial^2 \varphi_{0,k+1}}{\partial a_0 \partial a_1} g_2 + \ldots + \frac{\partial^{k+1} \varphi_{0,k+1}}{\partial a_0 \ldots \partial a_k} g_{k+1}$$

и покажем, что для линейного разностного уравнения порядка n

$$l_{n+k} = a_{1k} l_{n+k-1} + a_{2k} l_{n+k-2} + \ldots + a_{nk} l_k + g_{k+1}, \quad a_{nk} \neq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

справедлив аналог этой формулы [4]

$$l_{n+k} = \varphi_{n-1,n+k} l_{n-1} + \varphi_{n-2,n+k} l_{n-2} + \ldots + \varphi_{0,n+k} l_0 +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_{n-1,n+k}}{\partial a_{10}} g_1 + \frac{\partial^2 \varphi_{n-1,n+k}}{\partial a_{10} \partial a_{11}} g_2 + \ldots + \frac{\partial^{k+1} \varphi_{n-1,n+k}}{\partial a_{10} \ldots \partial a_{1k}} g_{k+1},$$

где $\varphi_{i,n+k}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, — фундаментальная система решений (ФСР) однородного ($g_{k+1} \equiv 0$) уравнения (1), $l_0, \ldots, l_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Как отмечено в [2, 3], нет эффективных алгоритмов построения ФСР уравнения (1). Известны [5] частные алгоритмы построения ФСР для конкретных линейных разностных уравнений. При решении разностных краевых задач [1] задача построения ФСР не ставится, а изучаются алгоритмы, например, „прогонки", „метод стрельбы", которые приводят не только к решению поставленных краевых задач, но и к исследованию вопросов хорошей обусловленности решений.

Общая теория построения решения уравнения (1) достаточно полно изложена во многих учебниках и монографиях (см., например, [3, 5, 6]). Эта теория базируется на матричном представлении элементов ФСР, которое хорошо демонстрирует общие свойства ФСР.

В настоящей работе предложен эффективный алгоритм построения ФСР уравнения (1), основанный на введенном понятии цепей, которые составлены по определенному правилу из коэффициентов уравнения (1). При этом оказалось, что достаточно построить только функцию $\varphi_{n-1,\,n+k}$, а остальные элементы ФСР выражаются через эту функцию.

Использование этого алгоритма намного упрощает построение решения линейного дифференциального уравнения, рассмотренного в работе [7], и он легко применим при построении решений в виде обобщенных степенных рядов более общих линейных дифференциальных уравнений.

2. При естественном пошаговом решении уравнения (1), т. е. когда на каждом очередном шаге использования уравнения (1) учитываются решения, найденные на предыдущих шагах, запись коэффициентов уравнения (1) в виде a_{jk} не позволяет установить закономерности, которые существуют между этими коэффициентами.

Поэтому переобозначим в (1)

$$a_{jk} = \alpha_{n+k-j}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

и построим сначала решение однородного уравнения

$$l_{n+k} = \alpha_{n+k-1}^{(1)} l_{n+k-1} + \alpha_{n+k-2}^{(2)} l_{n+k-2} + \dots + \alpha_k^{(n)} l_k, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{3}$$

Коэффициенты $\alpha_m^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, назовем элементами j-го ранга. При этом положим $\alpha_m^{(j)} = 0$ при $j \geq n+1$. Поскольку

$$l_n = \alpha_{n-1}^{(1)} l_{n-1} + \alpha_{n-2}^{(2)} l_{n-2} + \dots + \alpha_0^{(n)} l_0, \tag{4}$$

то $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$ — произвольные параметры, а значит,

$$l_{n+k} = \phi_{n-1,\,n+k} l_{n-1} + \phi_{n-2,\,n+k} l_{n-2} + \dots + \phi_{0,\,n+k} l_0, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{5}$$

Найдем рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют функции $\phi_{i,\,n+k}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, при пошаговом использовании формулы (3).

Обозначим $\phi_{i,\,n} = \alpha_i^{(n-1)}$. Тогда (4) преобразуется следующим образом:

$$l_n = \phi_{n-1,\,n} l_{n-1} + \phi_{n-2,\,n} l_{n-2} + \dots + \phi_{0,\,n} l_0. \tag{6}$$

Кроме того, положим $\phi_{i,\,m} \equiv 0$ при $m \leq n-1$.

Лемма 1. *При* $1 \leq k \leq n-1$

$$\phi_{i,\,n+k} = \phi_{i,\,n+k-1} \alpha_{n+k-1}^{(1)} + \phi_{i,\,n+k-2} \alpha_{n+k-2}^{(2)} + \dots + \phi_{i,\,n} \alpha_n^{(k)} + \alpha_i^{(n+k-i)}, \tag{7}$$

а при $k \geq n$

$$\phi_{i,\,n+k} = \phi_{i,\,n+k-1} \alpha_{n+k-1}^{(1)} + \phi_{i,\,n+k-2} \alpha_{n+k-2}^{(2)} + \dots + \phi_{i,\,k} \alpha_k^{(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $k = 1$. Из (3) имеем

$$l_{n+1} = \alpha_n^{(1)} l_n + \alpha_{n-1}^{(2)} l_{n-1} + \dots + \alpha_1^{(n)} l_1. \tag{9}$$

Подставляя вместо l_n выражение (6), находим

$$\phi_{n-1,n+1} = \phi_{n-1,n}\alpha_n^{(1)} + \alpha_{n-1}^{(2)}, \quad \phi_{n-2,n+1} = \phi_{n-2,n}\alpha_n^{(1)} + \alpha_{n-2}^{(3)}, \ldots$$
$$\ldots, \phi_{2,n+1} = \phi_{1,n}\alpha_n^{(1)} + \alpha_2^{(n-1)}, \quad \phi_{1,n+1} = \phi_{1,n}\alpha_n^{(1)} + \alpha_1^{(n)}, \quad \phi_{0,n+1} = \phi_{0,n}\alpha_n^{(1)}. \tag{10}$$

Используя далее (3) и индукцию, получаем формулы (7), (8).

Лемма доказана.

В [3, 5, 6] введено понятие фундаментальной системы решений уравнения (3).

Теорема 1. *Если* $\alpha_m^{(n)} \neq 0$, $m = 0, 1, \ldots$, *то функции* $\phi_{0,n+k}, \phi_{1,n+k}, \ldots$ $\ldots, \phi_{n-1,n+k}$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (3).

Доказательство. Обозначим через E_m вектор $E_m = (l_m, l_{m+1}, \ldots, l_{m+n-1})$, $m = 0, 1, \ldots$, а через $A_m^{(n)}$, $\Phi_{n,k}$ матрицы порядка n

$$A_m^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_m^{(n)} & \alpha_{m+1}^{(n-1)} & \alpha_{m+2}^{(n-2)} & \ldots & \alpha_{m+n-1}^{(1)} \end{pmatrix},$$
$$\Phi_{n,k} = \begin{pmatrix} \phi_{0,n+k} & \phi_{1,n+k} & \cdots & \phi_{n-1,n+k} \\ \phi_{0,n+k+1} & \phi_{1,n+k+1} & \cdots & \phi_{n-1,n+k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_{0,2n+k-1} & \phi_{1,2n+k-1} & \cdots & \phi_{n-1,2n+k-1} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда пошаговое использование формулы (3) равносильно равенствам

$$E_1 = A_0^{(n)}E_0, \quad E_2 = A_1^{(n)}A_0^{(n)}E_0, \ldots, E_m = A_{m-1}^{(n)}A_{m-2}^{(n)}\ldots A_0^{(n)}E_0.$$

С другой стороны, $E_{n+k} = \Phi_{n,k}E_0$, $k = 0, 1, \ldots$. Следовательно,

$$\Phi_{n,k} = A_{n+k-1}^{(n)}A_{n+k-2}^{(n)}\ldots A_0^{(n)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

Отсюда

$$\det \Phi_{n,k} = (-1)^{k(n+1)}\alpha_{n+k-1}^{(n)}\alpha_{n+k-2}^{(n)}\ldots\alpha_0^{(n)} \neq 0, \tag{13}$$

что является необходимым и достаточным условием существования фундаментальной системы решений.

Теорема доказана.

Таким образом, функции $\phi_{0,n+k}, \phi_{1,n+k}, \ldots, \phi_{n-1,n+k}$ образуют базис линейного пространства L решений уравнения (3). Поскольку он получен пошаговым использованием формулы (3), назовем его естественным базисом этого пространства; формула (5) определяет общее решение уравнения (3).

***Замечание* 1.** Если к уравнению (3) добавить начальные условия

$$l_0 = u_0, \quad l_1 = u_1, \ldots, l_{n-1} = u_{n-1}, \tag{14}$$

где $u_0, \ldots, u_{n-1}$ — известные числа, то разностная задача Коши (3), (14) имеет единственное решение

$$l_{n+k} = \phi_{0,n+k} u_0 + \phi_{1,n+k} u_1 + \ldots + \phi_{n-1,n+k} u_{n-1}.$$

Если T — невырожденная числовая матрица порядка n, элементы которой не зависят от k, то матрица $\Phi_{n,k} T = \Psi_{n,k}$ определяет другой базис $\psi_{0,k}$, $\psi_{1,k}, \ldots, \psi_{n-1,k}$ пространства L и общее решение уравнения (3) задается формулой

$$\psi_k = C_0 \psi_{0,k} + C_1 \psi_{1,k} + \ldots + C_{n-1} \psi_{n-1,k}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где C_i — произвольные постоянные.

3. Из формул (7), (8) следует, что функции $\phi_{i,n+k}$ — суммы произведений определенных коэффициентов уравнения (3). Обозначим через $M_{i,n+k}$ набор элементов (коэффициентов уравнения (3)), из которых будут построены функции $\phi_{i,n+k}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Из (4) следует, что $M_{i,n} = \alpha_i^{(n-i)}$. Из равенств (9), (10) получаем

$$M_{n-1,n+1} = (\alpha_{n-1}^{(1)}; \alpha_n^{(1)}; \alpha_{n-1}^{(2)}), \ \ldots, \ M_{i,n+1} = (\alpha_n^{(1)}; \alpha_i^{(n-i)}; \alpha_i^{(n-i+1)}), \ \ldots$$
$$\ldots, \ M_{0,n+1} = (\alpha_n^{(1)}; \alpha_0^{(n)}).$$

Из равенства (7) при $k = 2$ имеем

$$M_{i,n+2} = (\alpha_n^{(1)}, \alpha_{n+1}^{(1)}; \alpha_i^{(n-i)}; \alpha_i^{(n-i+1)}; \alpha_i^{(n-i+2)}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

а при $i, k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$M_{i,n+k} = (\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+k-1}^{(1)}; \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_{n+k-2}^{(2)}; \ldots; \alpha_n^{(k-1)},$$
$$\alpha_{n+1}^{(k-1)}; \alpha_n^{(k)}; \alpha_i^{(n-i)}; \ldots; \alpha_i^{(n-i+s)}), \quad s = \min(k, i). \tag{15}$$

Также из равенств (7), (8) при $k \geq n$ следует

$$M_{i,n+k} = (\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+k-1}^{(1)}; \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_{n+k-2}^{(2)}; \ldots; \alpha_n^{(n)}, \ldots, \alpha_k^{(n)}; \alpha_i^{(n-i)}; \ldots; \alpha_i^{(n)}).$$

Объединяя последнее равенство с равенством (15), для любого $k = 0, 1, \ldots$ получаем

$$M_{i,n+k} = (\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+k-1}^{(1)}; \ldots; \alpha_n^{(p)}; \ldots; \alpha_q^{(p)}; \alpha_i^{(n-i)}; \ldots; \alpha_i^{(n-i+s)}),$$
$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p = \min(k, n), \quad q = \max(k, n), \quad s = \min(k, i). \tag{16}$$

В наборе $M_{i,n+k}$ выделим начальные и конечные элементы. К начальным отнесем те элементы, которые имеют наименьший нижний индекс. Так, для набора $M_{n-1,n+k}$ начальными элементами будут $\alpha_{n-1}^{(1)}, \alpha_{n-1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(k+1)}$ при $k \leq n-1$ и $\alpha_{n-1}^{(1)}, \alpha_{n-1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(n)}$ при $k \geq n$; для набора $M_{i,n+k}$ — $\alpha_i^{(n-i)}, \ldots, \alpha_i^{(n-i+s)}$, а для набора $M_{0,n+k}$ начальным будет элемент $\alpha_0^{(n)}$.

Конечными элементами набора $M_{i,n+k}$ назовем те элементы, у которых сумма ранга и нижнего индекса равна $n+k$.

Возможны случаи, когда начальный и конечный элементы совпадают. Например, в наборе $M_{n-1,\,n+k}$ при $k \leq n-1$ элемент $\alpha_{n-1}^{(k+1)}$ является и начальным, и конечным.

Цепью, составленной из элементов набора $M_{i,\,n+k}$, $k \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, назовем произведение максимально возможного числа элементов из этого набора. При этом нижние индексы этих элементов различны и образуют возрастающую последовательность, заданную определенным правилом.

Очевидны следующие утверждения, которые легко проверяются индукцией с использованием формул (7), (8).

Лемма 2. *Иерархия расположения элементов (множителей) в каждой цепи, составленной из элементов набора* $M_{i,\,n+k}$, *такова, что для любых двух последовательных множителей справедливо правило умножения* $\ldots\alpha_i^{(j_1)}\alpha_{i+j_1}^{(j_2)}\ldots$, $j_1,\ j_2 = 1, 2, \ldots, n$.

В дальнейшем, когда речь идет о цепи, будем подразумевать, что в ней соблюдается указанная иерархия расположения элементов.

Лемма 3. *Любая цепь, составленная из элементов набора* $M_{i,\,n+k}$, $k \geq 0$, *начинается с любого из начальных элементов этого набора и заканчивается одним из конечных элементов этого набора.*

Порядком цепи назовем сумму рангов всех элементов, составляющих эту цепь.

Лемма 4. *Порядок каждой цепи, составленной из элементов набора* $M_{i,\,n+k}$, *равен* $n+k-i$, $k \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть $\alpha_i^{(j_1)}$ — начальный элемент цепи. Тогда согласно леммам 2 и 3 структура цепи такова:

$$\alpha_i^{(j_1)}\alpha_{i+j_1}^{(j_2)}\alpha_{i+j_1+j_2}^{(j_3)}\ldots\alpha_{i+j_1+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)},$$

где $\alpha_{i+j_1+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)}$ — конечный элемент цепи. Но, согласно определению конечного элемента, $i + j_1 + \ldots + j_{m-1} + j_m = n+k$. Отсюда $j_1 + \ldots + j_m = n+k-i$.

Лемма доказана.

Таким образом, функция $\phi_{i,\,n+k}$ — сумма всех цепей порядка $n+k-i$, составленных из элементов набора $M_{i,\,n+k}$.

Пример **1.** Пусть $n = 4$, $k = 3$. Тогда

$$M_{3,7} = (\alpha_3^{(1)}, \ldots, \alpha_6^{(1)};\ \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)};\ \alpha_3^{(3)}, \alpha_4^{(3)};\ \alpha_3^{(4)}),$$

$$M_{2,7} = (\alpha_4^{(1)}, \alpha_5^{(1)}, \alpha_6^{(1)};\ \alpha_2^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)};\ \alpha_2^{(3)}, \alpha_4^{(3)};\ \alpha_2^{(4)}),$$

$$M_{1,7} = (\alpha_4^{(1)}, \alpha_5^{(1)}, \alpha_6^{(1)};\ \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)};\ \alpha_4^{(3)};\ \alpha_1^{(3)};\ \alpha_1^{(4)}),$$

$$M_{0,7} = (\alpha_4^{(1)}, \alpha_5^{(1)}, \alpha_6^{(1)};\ \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)};\ \alpha_4^{(3)};\ \alpha_0^{(4)}),$$

$$\phi_{0,7} = \alpha_0^{(4)}(\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(2)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_4^{(3)}),$$

$$\phi_{1,7} = \alpha_1^{(3)}(\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_4^{(2)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(3)}) + \alpha_1^{(4)}(\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_5^{(2)}),$$

$$\phi_{2,7} = \alpha_2^{(2)}(\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_4^{(2)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(3)}) + \alpha_2^{(3)}(\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_5^{(2)}) + $$
$$+ \alpha_2^{(4)}\alpha_6^{(1)},$$
$$\phi_{3,7} = \alpha_3^{(1)}(\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(2)} + \alpha_4^{(2)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_4^{(3)}) + \alpha_3^{(2)}(\alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_5^{(2)}) + $$
$$+ \alpha_3^{(3)}\alpha_6^{(1)} + \alpha_3^{(4)}.$$

Для $n = 4,\ k = 4$

$$\phi_{0,8} = \alpha_0^{(4)} f_{4,8}, \qquad \phi_{1,8} = \alpha_1^{(3)} f_{4,8} + \alpha_1^{(4)} f_{3,8},$$
$$\phi_{2,8} = \alpha_2^{(2)} f_{4,8} + \alpha_2^{(3)} f_{3,8} + \alpha_2^{(4)} f_{2,8},$$
$$\phi_{3,8} = \alpha_3^{(1)} f_{4,8} + \alpha_3^{(2)} f_{3,8} + \alpha_3^{(3)} f_{2,8} + \alpha_3^{(4)} f_{1,8},$$

где $f_{1,8} = \alpha_7^{(1)},\ f_{2,8} = \alpha_6^{(1)}\alpha_7^{(1)} + \alpha_6^{(2)}$,

$$f_{3,8} = \alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(1)}\alpha_7^{(1)} + \alpha_5^{(1)}\alpha_6^{(2)} + \alpha_5^{(2)}\alpha_7^{(1)} + \alpha_5^{(3)},$$
$$f_{4,8} = \alpha_4^{(1)} f_{3,8} + \alpha_4^{(2)} f_{2,8} + \alpha_4^{(3)} f_{1,8} + \alpha_4^{(4)}.$$

***Замечание* 2.** Приведенный алгоритм построения цепей позволяет найти решение уравнения (3), свободное от условия $\alpha_m^{(n)} \neq 0$. Достаточно сохранить условие $\alpha_0^{(n)} \neq 0$. Решение уравнения (3) определяется формулой (5).

4. Из приведенного примера ясно, что для построения функций $\phi_{i,\,n+k}$ необходимо подробнее изучить структуру функций $f_{m,n+k}$, $m = 0, 1, \ldots, k$.

Общей частью наборов $M_{i,\,n+k}$ является набор

$$M_{n,n+k} = (\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+k-1}^{(1)};\ \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_{n+k-2}^{(2)}; \ldots;\ \alpha_n^{(p)}, \ldots, \alpha_q^{(p)}), \qquad (17)$$

где $p = \min(k, n)$, $q = \max(k, n)$, который получен из наборов $M_{i,\,n+k}$ отбрасыванием всех их начальных элементов. Начальными элементами в наборе $M_{n,n+k}$ являются элементы $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(p)}$ (элемент $\alpha_n^{(p)}$ может быть как начальным, так и конечным). Все цепи, которые можно составить из элементов этого набора, имеют порядок k. Действительно, любая цепь, составленная из элементов набора $M_{n,n+k}$, имеет структуру $\alpha_n^{(j_1)}\alpha_{n+j_1}^{(j_2)} \ldots \alpha_{n+j_1+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)}$. Для конечного элемента получаем $n + j_1 + \ldots + j_m = n + k$, откуда $j_1 + \ldots + j_m = k$. Сумму всех цепей, составленных из элементов набора $M_{n,n+k}$, обозначим через $f_{k,n+k}$.

Если в наборе $M_{n,n+k}$ опустить начальные элементы $\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(p)}$, то получим набор $M_{n+1,n+k}$, начальными элементами которого являются элементы $\alpha_{n+1}^{(1)}, \alpha_{n+1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(p-1)}$. Как и выше, легко убедиться, что любая цепь, составленная из элементов набора $M_{n+1,n+k}$, имеет порядок $k-1$. Сумму всех этих цепей обозначим $f_{k-1,\,n+k}$. Продолжая этот процесс, через $f_{k-m,\,n+k}$ обозначим сумму всех цепей порядка $k-m$, составленных из элементов набора, у которых начальными элементами являются элементы $\alpha_{n+m}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+m}^{(p-m)}$, $m = 0, 1, \ldots, k$. Кроме того, положим $f_{0,\,n+k} \equiv 1$.

Теорема 2. *Для функции* $f_{k,\,n+k}$ *справедливо разложение*

$$f_{k,\,n+k} = \alpha_n^{(1)} f_{k-1,\,n+k} + \alpha_n^{(2)} f_{k-2,\,n+k} + \ldots + \alpha_n^{(p)} f_{k-p,\,n+k}\,,$$
$$p = \min(n, k). \tag{18}$$

Доказательство. Очевидно, что суммы $\alpha_n^{(m)} f_{k-m,\,n+k}$, $m = 1, \ldots, p$, состоят из цепей порядка k с начальными элементами $\alpha_n^{(m)}$, и за счет этого эти суммы не могут иметь одинаковых слагаемых. Следовательно, выражение

$$\alpha_n^{(1)} f_{k-1,\,n+k} + \alpha_n^{(2)} f_{k-2,\,n+k} + \ldots + \alpha_n^{(p)} f_{k-p,\,n+k}$$

исчерпывает все цепи порядка k с начальными элементами $\alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(p)}$, т. е. это функция $f_{k,\,n+k}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для функций* $f_{k-m,\,n+k}$ *справедливы соотношения*

$$f_{k-m,\,n+k} = \frac{\partial f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(m)}} = \frac{\partial^m f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)} \partial \alpha_{n+1}^{(1)} \ldots \partial \alpha_{n+m-1}^{(1)}}, \quad m = 1, \ldots, \min(k, n). \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку начальный элемент $\alpha_n^{(j)}$ не содержится в слагаемых $\alpha_n^{(m)} f_{k-m,\,n+k}$ при $j \neq m$, из формулы (18) следует первая часть равенства (19). В частности,

$$f_{k-1,\,n+k} = \frac{\partial f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)}}. \tag{20}$$

Начальными элементами в цепях суммы $f_{k-1,\,n+k}$ являются $\alpha_{n+1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(p-1)}$. Составим для функции $f_{k-1,\,n+k}$ представление типа (18). Функция $f_{k-1,\,n+k}$ — сумма цепей порядка $k-1$. Поэтому начальные элементы $\alpha_{n+1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(p-1)}$ разбивают эти цепи на $p-1$ группу слагаемых, а именно, элемент $\alpha_{n+1}^{(1)}$ можно умножить только на цепи порядка $k-2$ с начальными элементами $\alpha_{n+2}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p-2$ (чтобы получить цепи порядка $k-1$). Это означает, что $f_{k-1,\,n+k} = \alpha_{n+1}^{(1)} f_{k-2,\,n+k} + \ldots$, и так как следующие цепи порядка $k-1$ начинаются с элементов $\alpha_{n+1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n+1}^{(p-1)}$, элемент $\alpha_{n+1}^{(1)}$ содержится только в выражении $\alpha_{n+1}^{(1)} f_{k-2,\,n+k}$. Поэтому с учетом (20)

$$f_{k-2,\,n+k} = \frac{\partial f_{k-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n+1}^{(1)}} = \frac{\partial^2 f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)} \partial \alpha_{n+1}^{(1)}}.$$

Далее, функция $f_{k-2,\,n+k}$ — сумма цепей порядка $k-2$, среди начальных элементов которых есть элемент $\alpha_{n+2}^{(1)}$. Чтобы получить с помощью этого элемента цепи порядка $k-2$, его необходимо умножить на все цепи порядка $k-3$, т. е. на функцию $f_{k-3,\,n+k}$, и элемент $\alpha_{n+2}^{(1)}$ содержится только в слагаемых суммы $\alpha_{n+2}^{(1)} f_{k-3,\,n+k}$. Тогда $f_{k-2,\,n+k} = \alpha_{n+2}^{(1)} f_{k-3,\,n+k} + \ldots$. Отсюда

$$f_{k-3,\,n+k} = \frac{\partial f_{k-2,\,n+k}}{\partial \alpha_{n+2}^{(1)}} = \frac{\partial^3 f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)} \partial \alpha_{n+1}^{(1)} \partial \alpha_{n+2}^{(1)}}.$$

Продолжая по индукции этот процесс, получаем формулу (19).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для функций* $\phi_{i,\,n+k}$ *справедливы разложения*

$$\phi_{i,\,n+k} = \alpha_i^{(n-i)} f_{k,\,n+k} + \alpha_i^{(n-i+1)} f_{k-1,\,n+k} + \ldots + \alpha_i^{(n-i+s)} f_{k-s,\,n+k}, \qquad (21)$$

где $s = \min(k, i)$, $k \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $f_{0,\,n+k} \equiv 1$.

Кроме того,

$$f_{k-m,\,n+k} = \frac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(m+1)}} = \frac{\partial^{m+1} \phi_{k-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \partial \alpha_n^{(1)} \ldots \partial \alpha_{n+m-1}^{(1)}}, \qquad (22)$$

где $m = 0, 1, \ldots, s$.

Доказательство. Применим те же рассуждения, что и при доказательствах теорем 2 и 3, к набору $M_{n-1,\,n+k}$, который можно восстановить по набору $M_{n,\,n+k}$, добавив к нему начальные элементы $\alpha_{n-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(s+1)}$. Получим сумму $\phi_{n-1,\,n+k}$ всех цепей порядка $k+1$ и, следовательно,

$$\phi_{n-1,\,n+k} = \alpha_{n-1}^{(1)} f_{k,\,n+k} + \alpha_{n-1}^{(2)} f_{k-1,\,n+k} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(s+1)} f_{k-s,\,n+k}, \qquad (23)$$

где функции $f_{k,\,n+k}, f_{k-1,\,n+k}, \ldots, f_{k-s,\,n+k}$ строятся из элементов набора $M_{n,\,n+k}$, $s = \min(k, n-1)$.

Поскольку функции $\phi_{i,\,n+k}$ — сумма всех цепей порядка $n+k-i$, суммы $\alpha_i^{(n-i+m)} f_{k-m,\,n+k}$, $m = 0, 1, \ldots$, $s = \min(k, i)$, исчерпывают все цепи порядка $n+k-i$, построенные из элементов набора $M_{i,\,n+k}$, который восстановлен по набору $M_{n,\,n+k}$ добавлением к нему начальных элементов $\alpha_i^{(n-i)}, \alpha_i^{(n-i+1)}, \ldots$ $\ldots, \alpha_i^{(n-i+s)}$, а значит, сумма

$$\alpha_i^{(n-i)} f_{k,\,n+k} + \alpha_i^{(n-i+1)} f_{k-1,\,n+k} + \ldots + \alpha_i^{(n-i+s)} f_{k-s,\,n+k}$$

исчерпывает все цепи порядка $n+k-i$, построенные из элементов набора $M_{i,\,n+k}$, т. е. это функция $\phi_{i,\,n+k}$.

Равенства (22) получаются из равенства (23), как и при доказательстве теоремы 3.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Формулу (21) можно записать в следующем виде:

$$\phi_{i,\,n+k} = \alpha_i^{(n-i)} \frac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)}} + \alpha_i^{(n-i+1)} \frac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(2)}} + \ldots + \alpha_i^{(n-i+s)} \frac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(s+1)}}, \quad (24)$$

$$k \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad s = \min(k, i).$$

5. Запишем подробнее формулы (21):

$$\phi_{0,\,n+k} = \alpha_0^{(n)} f_{k,\,n+k},$$

$$\phi_{1,\,n+k} = \alpha_1^{(n-1)} f_{k,\,n+k} + \alpha_1^{(n)} f_{k-1,\,n+k},$$

$$\phi_{2,\,n+k} = \alpha_2^{(n-2)} f_{k,\,n+k} + \alpha_2^{(n-1)} f_{k-1,\,n+k} + \alpha_2^{(n)} f_{k-2,\,n+k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$\phi_{i,\,n+k} = \alpha_i^{(n-i)} f_{k,\,n+k} + \alpha_i^{(n-i+1)} f_{k-1,\,n+k} + \ldots + \alpha_i^{(n)} f_{k-i,\,n+k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\phi_{n-1,\,n+k} = \alpha_{n-1}^{(1)} f_{k,\,n+k} + \alpha_{n-1}^{(2)} f_{k-1,\,n+k} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n)} f_{k-n+1,\,n+k}.$$

При $k \geq n$ в этих формулах нет таких функций $f_{m,\,n+k}$, у которых $m < 0$. При $0 \leq k \leq n-2$ такие функции есть. Поскольку $f_{m,\,n+k}$ — сумма цепей порядка $m > 0$, полагаем $f_{m,\,n+k} \equiv 0$ при $m < 0$ и $f_{0,\,n+k} \equiv 1$.

Так как наличие нулевых слагаемых в (25) на дальнейшие преобразования не влияет, $\phi_{i,\,n+k}$ будем использовать в виде (25), $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Обозначим

$$W_{n,k} = \begin{pmatrix} f_{k,\,n+k} & \cdots & f_{k-i,\,n+k} & \cdots & f_{k-n+1,\,n+k} \\ f_{k+1,\,n+k+1} & \cdots & f_{k-i+1,\,n+k+1} & \cdots & f_{k-n+2,\,n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+k-1,\,2n+k-1} & \cdots & f_{n+k-i-1,\,2n+k-1} & \cdots & f_{k,\,2n+k-1} \end{pmatrix}.$$

При $k = 0$ эта матрица имеет треугольный вид: главная диагональ состоит из единиц, а над ней все элементы являются нулевыми. При $1 \leq k \leq n-2$ верхняя $(k+1)$-я диагональ состоит из единиц, а над ней все элементы нулевые. При $k = n-1$ эта матрица не имеет нулевых элементов, а в верхнем правом углу находится единица.

Введем преобразование $T_{j,n}$. Это матрица порядка n следующей структуры: в p-й строке $p \neq j$; $j, p = 1, \ldots, n$, на p-м месте находится единица, а все остальные элементы — нули; в j-й строке на j-м месте находится единица, слева от нее нули, а справа — элементы $-\alpha_j^{(n-1)}/\alpha_{j-1}^{(n)}, \ldots, -\alpha_{n-1}^{(j)}/\alpha_{j-1}^{(n)}$, т. е. это матрицы треугольного типа, на главной диагонали которых находятся единицы, а под ней все элементы являются нулевыми, $\det T_{j,n} = 1$.

Теорема 5. *Для матрицы* $\Phi_{n,k}$ *из* (11) *справедливо равенство*

$$\Phi_{n,k} T_{1,n} T_{2,n} \ldots T_{n-1,n} = W_{n,k} \operatorname{diag}(\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(n)}), \qquad k \geq 0. \tag{26}$$

При этом

$$\det W_{n,k} = (-1)^{k(n+1)} \alpha_n^{(n)} \ldots \alpha_{n+k-1}^{(n)}, \tag{27}$$

а $\det W_{n,0} = 1$ *при* $k = 0$.

Доказательство. Запишем элементы матрицы $\Phi_{n,k}$, использовав формулы (25). Нетрудно заметить, что каждое очередное преобразование $T_{j,n}$ осуществляет элементарные действия над столбцами матрицы $\Phi_{n,k} T_{1,n} \ldots T_{j-1,n}$, а именно, ее j-й столбец умножается последовательно на числа $-\alpha_j^{(n-1)}/\alpha_{j-1}^{(n)}, \ldots$ $\ldots, -\alpha_{n-1}^{(j)}/\alpha_{j-1}^{(n)}$ и складывается с соответствующим $(j+1)$-, …, n-м столбцами этой матрицы. В результате имеем

$$\Phi_{n,k} T_{1,n} \ldots T_{n-1,n} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(n)} f_{k,\,n+k} & \ldots & \alpha_{n-1}^{(n)} f_{k-n+1,\,n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_0^{(n)} f_{n+k-1,\,2n+k-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{(n)} f_{k,\,2n+k-1} \end{pmatrix},$$

что и доказывает равенство (26).

Равенство (27) следует из (13), так как $\det T_{j,n} = 1$.

Теорема доказана.

Поскольку матрица $W_{n,k}$ получена из матрицы $\Phi_{n,k}$ невырожденными преобразованиями, $F_{j,k} = f_{k-j+1,\,n+k}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, также образуют фундаментальный базис пространства L. Этот базис отличается от других фундаментальных базисов тем, что из формулы общего решения уравнения (3) $\omega_k =$ $= C_1 F_{1,k} + C_2 F_{2,k} + \ldots + C_n F_{n,k}$ следует $\omega_i = f_{i,\,n+k} C_1 + f_{i-1,\,n+k} C_2 + \ldots$ $\ldots + f_{1,\,n+k} C_i + C_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Назовем этот фундаментальный базис нормальным.

***Замечание* 4.** Если воспользоваться равенствами (19) и (22), то получим

$$W_{n,k} = \begin{pmatrix} f_{k,\,n+k} & \dfrac{\partial f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)}} & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1} f_{k,\,n+k}}{\partial \alpha_n^{(1)} \partial \alpha_{n+1}^{(1)} \partial \alpha_{2n-2}^{(1)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+k-1,\,2n+k-1} & \dfrac{\partial f_{n+k-1,\,2n+k-1}}{\partial \alpha_n^{(1)}} & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1} f_{n+k-1,\,2n+k-1}}{\partial \alpha_n^{(1)} \partial \alpha_{n+1}^{(1)} \partial \alpha_{2n-2}^{(1)}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)}} & \ldots & \dfrac{\partial \phi_{n-1,\,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(n)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \phi_{n-1,\,2n+k-1}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)}} & \ldots & \dfrac{\partial \phi_{n-1,\,2n+k-1}}{\partial \alpha_{n-1}^{(n)}} \end{pmatrix},$$

и $\det W_{n,k}$ можно назвать разностным аналогом вронскиана, а также это якобиан функций $\phi_{n-1,\,n+k}, \ldots, \phi_{n-1,\,2n+k-1}$, $k \geq 0$.

6. Определим теперь количество цепей порядка m. Пусть в цепи порядка m содержится $x_{1,m}$ элементов 1-го ранга, $x_{2,m}$ элементов 2-го ранга, … …, $x_{n,m}$ элементов n-го ранга. Тогда, очевидно,

$$x_{n,m} = 0, 1, \ldots, [m/n] = \gamma_{n,m}, \quad x_{n-1,\,m} = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m - nx_{n,m}}{n-1}\right] = \gamma_{n-1,\,m}, \ \ldots$$

$$\ldots, \ x_{2,m} = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m - nx_{n,m} - (n-1)x_{n-1,\,m} - \ldots - 3x_{3,n}}{2}\right] = \gamma_{n-1,\,m},$$

$$x_{1,m} = 0, 1, \ldots, m - nx_{n,m} - \ldots - 2x_{2,m} = \gamma_{1,m}.$$

Поскольку порядок цепи — сумма рангов всех входящих в нее элементов, то $m = x_{1,m} + 2x_{2,m} + \ldots + nx_{n,m}$.

Пусть $s = x_{1,m} + x_{2,m} + \ldots + x_{n,m}$. Это означает, что s элементов (букв) разбиты на n непересекающихся подмножеств, содержащих $x_{j,m}$ различных элементов (букв). Количество различных слов, которые можно составить из этих букв (элементов), определяется формулой [8]

$$r(x_{2,m}, \ldots, x_{n,m}) = \frac{(x_{1,m} + \ldots + x_{n,m})!}{x_{1,m}! \ldots x_{n,m}!} = \frac{(m - x_{2,m} - 2x_{3,m} - \ldots - (n-1)x_{n,m})!}{x_{2,m}! \ldots x_{n,m}!(m - 2x_{2,m} - \ldots - nx_{n,m})!}.$$

Поэтому число всех цепей порядка m определяется формулой

$$N_m = \sum_{x_{n,m}=0}^{\gamma_{n,m}} \sum_{x_{n-1,m}=0}^{\gamma_{n-1,m}} \ldots \sum_{x_{2,m}=0}^{\gamma_{2,m}} r(x_{2,m}, \ldots, x_{n,m}), \qquad nx_{n,m} + 2x_{2,m} + x_{1,m} = m.$$

Тогда, согласно (18), количество цепей порядка k, из которых состоит функция $f_{k,\,n+k}$, определяется формулой

$$N_k = \sum_{j=k-p}^{k-1} N_j, \quad k \geq 1, \quad p = \min(k, n). \tag{28}$$

Особенно простой вид эта формула имеет при $n = 2$. Поскольку $f_{k,\,2+k} = \alpha_2^{(1)} f_{k-1,\,2+k} + \alpha_2^{(2)} f_{k-2,\,2+k}$, то $N_k = N_{k-1} + N_{k-2}$, $k \geq 1$, что также следует из (28) при $k \geq 2$. При $k = 1$ получаем $N_1 = N_0$. Но $f_{1,3} = \alpha_0^{(2)} f_{0,3}$, и так как $f_{0,3} = 1$, $f_{1,3}$ состоит из одной цепи порядка 2, т. е. $N_1 = 1$. Итак, $N_0 = N_1 = 1$ и, следовательно, последовательность N_k, $k \geq 0$, является последовательностью Фибоначчи.

Согласно формулам (25), $\phi_{1,\,2+k}$ — сумма цепей порядка $k+1$, $\phi_{1,\,2+k} = \alpha_1^{(1)} f_{k,\,2+k} + \alpha_1^{(2)} f_{k-1,\,2+k}$. Сохраним обозначение N_{k+1} за количеством слагаемых в сумме $\phi_{1,\,2+k}$.

При $k = 0$ функция $\phi_{1,2} = \alpha_1^{(1)} f_{0,2}$, значит, $N_1 = 1$.

При $k = 1$ функция $\phi_{1,3} = \alpha_1^{(1)} f_{1,3} + \alpha_1^{(2)} f_{0,3}$, и так как $f_{1,3} = \alpha_2^{(1)}$, $f_{0,3} \equiv \equiv 1$, то $N_2 = 2$.

При $k = 2$ функция $\phi_{1,4} = \alpha_1^{(1)} f_{2,4} + \alpha_1^{(2)} f_{1,4}$, и тогда $N_3 = N_2 + N_1 = 3$.

Таким образом, последовательность $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_{k+1} = N_k + N_{k-1}$, $k \geq 2$, также является последовательностью Фибоначчи.

Найдем число N_m. Поскольку $x_{1,m} + 2x_{2,m} = m$, то

$$r(x_{2,m}) = \frac{(m - x_{2,m})!}{x_{2,m}!(m - 2x_{2,m})!} = C_{m-x_{2,m}}^{x_{2,m}}$$

и

$$N_m = \sum_{x_{2,m}=0}^{[m/2]} C_{m-x_{2,m}}^{x_{2,m}}.$$

Но это известное [9] представление для m-го члена последовательности Фибоначчи. Если учесть, что $C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} = C_{k+1}^1 = C_{k+1}^k$, то действительно $N_{k+1} = = N_k + N_{k-1}$.

7. Построим частное решение неоднородного уравнения

$$l_{n+k} = \alpha_{n+k-1}^{(1)} l_{n+k-1} + \ldots + \alpha_k^{(n)} l_k + g_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{29}$$

Теорема 6. *Частное решение уравнения* (29) *определяется формулой*

$$f_{k,n+k} g_1 + f_{k-1,n+k} g_2 + \ldots + f_{k-j,n+k} g_{j+1} + \ldots + f_{0,n+k} g_{k+1}. \tag{30}$$

Доказательство. Алгоритм нахождения коэффициентов при g_j состоит в пошаговом использовании формулы (29). Выясним сначала, каким образом конструируется коэффициент при g_1. Для $k = 0$ коэффициент равен единице, для $k = 1$ при использовании значения l_n этот коэффициент равен $\alpha_n^{(1)}$, для $k = 2$ — $\alpha_n^{(1)} \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_n^{(2)} = f_{2,n+2}$, т. е. составляется сумма цепей порядка 2, образованных из элементов набора $(\alpha_n^{(1)}, \alpha_{n+1}^{(1)}; \alpha_n^{(2)})$, и т. д. По индукции для произвольного k, исходя из (29), для построения коэффициента при g_1 используем элементы набора $M_{n,n+k}$ из (17), и сумма $f_{k,n+k}$ всех цепей порядка k, составленных из элементов этого набора, является коэффициентом при g_1.

Поскольку число g_2 впервые появляется в алгоритме построения коэффициентов при g_j, начиная со значения $k = 1$, т. е. при нахождении l_{n+1}, на k-м шаге алгоритма, как легко заметить, для конструирования коэффициента при g_2 используются все цепи порядка $k = 1$, составленные из элементов набора $M_{n+1,n+k}$ (информацию об этом наборе см. перед теоремой 2), и сумма $f_{k-1,n+k}$ этих цепей является коэффициентом при g_2.

Продолжая этот процесс, получаем формулу (30).

Теорема доказана.

Учитывая равенство (22), решение уравнения (29) определяем формулой

$$l_{n+k} = \phi_{0,n+k} l_0 + \ldots + \phi_{n-1,n+k} l_{n-1} + \frac{\partial \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)}} g_1 + \frac{\partial^2 \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \partial \alpha_n^{(1)}} g_2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^m \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \partial \alpha_n^{(1)} \ldots \partial \alpha_{n+m-2}^{(1)}} g_m + \ldots + \frac{\partial^{k+1} \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \ldots \partial \alpha_{n+k-1}^{(1)}} g_{k+1}, \tag{31}$$

где

$$\phi_{i,n+k} = \alpha_i^{(n-i)} \frac{\partial \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)}} +$$

$$+ \alpha_i^{(n-i+1)} \frac{\partial^2 \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \partial \alpha_n^{(1)}} + \ldots + \alpha_i^{(n-i+s)} \frac{\partial^{s+1} \phi_{n-1,n+k}}{\partial \alpha_{n-1}^{(1)} \ldots \partial \alpha_{n+s-1}^{(1)}},$$

$$s = \min(k, i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad k \geq 0.$$

8. ***Пример* 2.** Случай $n = 2$.

Разностное уравнение второго порядка

$$l_{2+k} = \alpha_{1+k}^{(1)} l_{1+k} + \alpha_k^{(2)} l_k + g_{k+1}, \qquad k \geq 0, \tag{32}$$

имеет решение

$$l_{2+k} = \phi_{0,2+k} l_0 + \phi_{1,2+k} l_1 + f_{k,2+k} g_1 + \ldots$$

$$\ldots + f_{k-m,2+k} g_{m+1} + \ldots + f_{0,2+k} g_{k+1}.$$

Поскольку $\phi_{0,2+k} = \alpha_0^{(2)} f_{k,2+k}$, $\phi_{1,2+k} = \alpha_1^{(1)} f_{k,2+k} + \alpha_1^{(2)} f_{k-1,2+k}$, общее решение уравнения (32) определяется формулой

$$l_{2+k} = (\alpha_1^{(1)} l_1 + \alpha_0^{(2)} l_0) f_{k,2+k} + \alpha_1^{(2)} f_{k-1,2+k} l_1 + f_{k,2+k} g_1 + \ldots$$

$$\ldots + f_{k-m,2+k} g_{m+1} + \ldots + f_{0,2+k} g_{k+1}. \tag{33}$$

Краевая задача

$$\alpha_1^{(1)} l_1 + \alpha_0^{(2)} l_0 = g_1,$$

$$l_{2+k} = \alpha_{1+k}^{(1)} l_{1+k} + \alpha_k^{(2)} l_k + g_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-2,$$

$$\alpha_N^{(1)} l_N + \alpha_{N-1}^{(2)} l_{N-1} = g_N,$$

легко решается с использованием (33). При этом вопрос, связанный с исследованием хорошей обусловленности решения этой краевой задачи, здесь не затрагивается. По формулам (33) находим l_N и l_{N-1}. В результате второе краевое условие схематически запишется так:

$$\omega_0 l_0 + \omega_1 l_1 = G,$$

где

$$\omega_0 = \alpha_0^{(2)} (\alpha_N^{(1)} f_{N-2,N} + \alpha_{N-1}^{(2)} f_{N-3,N-1}),$$

$$\omega_1 = \alpha_N^{(1)}(\alpha_1^{(1)} f_{N-2,N} + \alpha_1^{(2)} f_{N-3,N}) + \alpha_{N-1}^{(2)}(\alpha_1^{(1)} f_{N-3,N-1} + \alpha_1^{(2)} f_{N-4,N-1}).$$

Составляя систему уравнений

$$\alpha_0^{(2)} l_0 + \alpha_1^{(1)} l_1 = g_1,$$

$$\omega_0 l_0 + \omega_1 l_1 = G,$$

убеждаемся, что рассматриваемая краевая задача имеет решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы

$$\alpha_0^{(2)} \alpha_1^{(2)} (\alpha_N^{(1)} f_{N-3,N} + \alpha_{N-1}^{(2)} f_{N-4,N-1}) \neq 0.$$

Для построения функции $f_{k,2+k}$ используется набор $(\alpha_2^{(1)},\ldots,\alpha_{k+1}^{(1)}; \alpha_2^{(2)},\ldots,\alpha_k^{(2)})$, а функции $f_{k-1,2+k}$ — набор $(\alpha_3^{(1)},\ldots,\alpha_{k+1}^{(1)}; \alpha_3^{(2)},\ldots,\alpha_k^{(2)})$.

Функции $f_{k,2+k}$ и $f_{k-1,2+k}$ определяются формулами

$$f_{k,2+k} = \alpha_2^{(1)} \ldots \alpha_{k+1}^{(1)} + \sum_{i_1=2}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots) + \sum_{i_1=2}^{k-2} \sum_{i_2=i_1+2}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots \alpha_{i_2}^{(2)} \ldots) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_1=2}^{k-2m+2} \sum_{i_2=i_1+2}^{k-2m+4} \ldots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots \alpha_{i_2}^{(2)} \ldots \alpha_{i_m}^{(2)} \ldots), \qquad (34)$$

$$f_{k-1,2+k} = \alpha_3^{(1)} \ldots \alpha_{k+1}^{(1)} + \sum_{i_1=3}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots) + \sum_{i_1=3}^{k-2} \sum_{i_2=i_1+2}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots \alpha_{i_2}^{(2)} \ldots) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i_1=3}^{k-2m+2} \sum_{i_2=i_1+2}^{k-2m+4} \ldots \sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{k} (\ldots \alpha_{i_1}^{(2)} \ldots \alpha_{i_m}^{(2)} \ldots), \qquad (35)$$

где $m = 1, 2, \ldots, [k/2]$, $i_0 = 0$, а вместо точек в круглых скобках необходимо записать подходящие элементы 1-го ранга из множества $\alpha_2^{(1)},\ldots,\alpha_{k+1}^{(1)}$, которые сформируют все цепи порядка k для функции $f_{k,2+k}$, и из множества $\alpha_3^{(1)},\ldots,\alpha_{k+1}^{(1)}$, которые сформируют все цепи порядка $k-1$ для функции $f_{k-1,2+k}$.

9. ***Пример* 3.** Получение комбинаторных формул.

Известно [1] решение уравнения

$$l_{2+k} = a l_{1+k} + b l_k, \quad k \geq 0, \qquad (36)$$

где a и b — числа. Оно связано с решением характеристического уравнения $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$. Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения. В зависимости от значений a и b решениями уравнения (36) являются: 1) λ_1^k и λ_2^k, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 2) λ_1^k и $k\lambda_1^k$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = a/2$.

Из уравнения (36) следует, что $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = \ldots = \alpha_k^{(1)} = a$; $\alpha_0^{(2)} = \alpha_1^{(2)} = \ldots = \alpha_k^{(2)} = b$; $k \geq 0$. Тогда функции $f_{k,2+k}$ и $f_{k-1,2+k}$ из (34), (35) определяются формулами

$$f_{k,\,2+k} = \sum_{m=0}^{[k/2]} C_{k-m}^{m} a^{k-2m} b^{m}, \qquad f_{k-1,\,2+k} = \sum_{m=0}^{[(k-1)/2]} C_{k-m-1}^{m} a^{k-2m-1} b^{m}. \quad (37)$$

Покажем, что из всех решений $l_{2+k} = (al_1 + bl_0) f_{k,\,2+k} + b f_{k-1,\,2+k} l_1$ при определенном выборе параметров l_0 и l_1 можно получить приведенные выше решения уравнения (36).

Лемма 5. *Пусть* $\lambda^2 = a\lambda + b$. *Тогда*

$$\psi(k) = \lambda f_{k,\,2+k} + b f_{k-1,\,2+k} = \lambda^{k+1}. \quad (38)$$

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ получаем

$$\psi(1) = \lambda f_{1,3} + b f_{0,3} = \lambda a + b = \lambda^2.$$

Покажем, что

$$\psi(k+1) - a\psi(k) = b\lambda^k, \quad (39)$$

$$\psi(2) = \lambda f_{2,4} + b f_{1,4} = \lambda(a^2 + b) + ab = a(\lambda a + b) + \lambda b = a\lambda^2 + \lambda b = \lambda^3.$$

Итак, при $k = 1$ имеем $\psi(2) - a\psi(1) = \lambda(a^2 + b) + ab - \lambda a^2 - ab = \lambda b$.

Пусть равенства (38), (39) справедливы при $k = 2s - 2$, т. е.

$$\psi(2s-1) - a\psi(2s-2) = b\lambda^{2s-2}, \qquad \psi(2s-2) = \lambda^{2s-1}. \quad (40)$$

Тогда

$$\psi(2s-1) = b\lambda^{2s-2} + a\psi(2s-2) = b\lambda^{2s-2} + a\lambda^{2s-1} = \lambda^{2s}.$$

Покажем, что равенства (38), (39) справедливы при $k = 2s - 1$, т. е.

$$\psi(2s) - a\psi(2s-1) = b\lambda^{2s-1}. \quad (41)$$

Если это равенство будет доказано, то из него получим $\psi(2s) = b\lambda^{2s-1} + a\psi(2s-1) = \lambda^{2s+1}$.

Докажем (41). Из равенств (37), (40), левой части (38) и $C_n^m - C_{n-1}^m = C_{n-1}^{m-1}$ следует

$$\psi(2s-1) - a\psi(2s-2) =$$

$$= \lambda \sum_{m=1}^{s-1} C_{2s-m-2}^{m-1} a^{2s-2m-1} b^m + b \sum_{m=1}^{s-1} C_{2s-m-3}^{m-1} a^{2s-2m-2} b^m = b\lambda^{2s-2}. \quad (42)$$

Если учесть, что $\lambda^2 = a\lambda + b$, и равенства (37) и (38), то

$$\psi(2s) - a\psi(2s-1) =$$

$$= \lambda\left(f_{2s,\,2s+2} - a f_{2s-1,\,2s+1}\right) + b\left(f_{2s-1,\,2s+2} - a f_{2s-2,\,2s+1}\right) =$$

$$= \lambda^2 \sum_{m=1}^{s-1} C_{2s-m-2}^{m-1} a^{2s-2m-1} b^m + \lambda b \sum_{m=1}^{s-1} C_{2s-m-3}^{m-1} a^{2s-2m-2} b^m.$$

Учитывая (42), получаем

$$\psi(2s) - a\psi(2s-1) = \lambda[\psi(2s-1) - a\psi(2s-2)] = b\lambda^{2s-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$\delta(k) = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m C_{k-m}^m}{4^m} = \frac{k+1}{2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{43}$$

Доказательство проведем индукцией по k. Имеем $\delta(0) = \delta(1) = 1$. Покажем, что

$$\delta(k+1) - \delta(k) = -\frac{1}{4}\delta(k-1). \tag{44}$$

При $k = 1$ получаем

$$\delta(2) - \delta(1) = 1 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\delta(0).$$

Пусть равенства (43), (44) справедливы при $k = 2s - 1$, т. е.

$$\delta(2s) - \delta(2s-1) = -\frac{1}{4}\delta(2s-2),$$

$$\delta(2s-1) = \frac{2s}{2^{2s-2}}, \qquad \delta(2s-2) = \frac{2s-1}{2^{2s-2}}.$$

Отсюда $\delta(2s) = \dfrac{2s+1}{2^{2s}}$.

Покажем, что для $k = 2s$

$$\delta(2s+1) - \delta(2s) = -\frac{1}{4}\delta(2s-1).$$

Используя (43), записываем $\delta(2s+1)$ и $\delta(2s)$. Тогда

$$\delta(2s+1) - \delta(2s) = -\frac{C_{2s-1}^0}{4} - \frac{C_{2s-2}^1}{4} - \ldots - (-1)^s \frac{C_s^{s-1}}{4} = -\frac{1}{4}\delta(2s-1),$$

откуда

$$\delta(2s+1) = -\frac{1}{4}\delta(2s-1) + \delta(2s) =$$

$$= -\frac{s}{2^{2s}} + \frac{2s+1}{2^{2s}} = \frac{s+1}{2^{2s}} = \frac{2s+2}{2^{2s+1}}.$$

Лемма доказана.

Общее решение уравнения (36), согласно (33), при $g_j = 0$ определяется формулой

$$l_{2+k} = (al_1 + bl_0)\, f_{k,\,2+k} + bl_1 f_{k-1,\,2+k}.$$

Теорема 7. *Пусть* λ_1 *и* λ_2 — *корни уравнения* $\lambda^2 = a\lambda + b$.

Тогда:

1) *если* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *то при* $l_1 = \lambda_i$, $l_0 = 1$ $l_{2+k} = \lambda_i^{2+k}$;

2) *если* $\lambda_1 = \lambda_2 = a/2$, *то при* $l_1 = \lambda_1 = \dfrac{a}{2}$, $l_0 = 1$

$$l_{2+k} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2+k} = \lambda_1^{2+k},$$

а при $l_1 = \lambda_1, \; l_0 = 0$

$$l_{2+k} = (2+k)\left(\frac{a}{2}\right)^{2+k} = (2+k)\lambda_1^{2+k}.$$

Доказательство. 1. Согласно (38) имеем

$$l_{2+k} = (a\lambda_i + b) f_{k,2+k} + b\lambda_i f_{k-1,2+k} =$$

$$= \lambda_i^2 f_{k,2+k} + b\lambda_i f_{k-1,2+k} = \lambda_i \psi(k) = \lambda_i^{2+k}.$$

2. Для $\lambda_1 = a/2$ при $l_1 = \lambda_1, \; l_0 = 1$ воспользуемся случаем 1 и $l_{2+k} = \lambda_1^{2+k} = (a/2)^{2+k}$.

Поскольку $b = -a^2/4$, при $l_1 = \lambda_1 = a/2, \; l_0 = 0$ получаем

$$l_{2+k} = l_1\left(a f_{k,2+k} - \frac{a^2}{4} f_{k-1,2+k}\right) = \frac{a^2}{8}\left(4 f_{k,2+k} - a f_{k-1,2+k}\right).$$

Обозначим

$$\phi(k) = 4 f_{k,2+k} - a f_{k-1,2+k}.$$

Используя формулу (38) при $\lambda = a/2$ и $b = -a^2/4$, находим

$$\frac{a}{4}(2 f_{k,2+k} - a f_{k-1,2+k}) = \left(\frac{a}{2}\right)^{k+1},$$

а значит,

$$\phi(k) = 2 f_{k,2+k} + \frac{a^k}{2^{k-1}}.$$

Но согласно (43)

$$f_{k,2+k} = a^k \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m C_{k-m}^m}{4^m} = a^k \delta(k) = a^k \frac{k+1}{2^k}.$$

Следовательно,

$$\phi(k) = a^k \frac{k+2}{2^{k-1}},$$

а значит,

$$l_{2+k} = (k+2)\left(\frac{a}{2}\right)^{2+k}.$$

Теорема доказана.

Из формулы (38) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, учитывая, что $\lambda_1 + \lambda_2 = a, \; \lambda_1\lambda_2 = -b$, получаем

$$f_{k,2+k}(a,b) = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad f_{k-1,2+k}(a,b) = \frac{\lambda_1^{k} - \lambda_2^{k}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Отсюда при $b \to -a^2/4$ (это равносильно тому, что $\lambda_1 \to \lambda_2$) получаем

$$f_{k,2+k}\left(a, -\frac{a^2}{2}\right) = (k+1)\left(\frac{a}{2}\right)^k = (k+1)\lambda_2^k.$$

***Замечание* 5.** Корни λ_1 и λ_2 могут быть комплексно-сопряженными числами. Пусть $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\phi}$. Тогда, если a и b — действительные числа, из (38) получаем

$$|\lambda_1| f_{k,2+k} \cos\phi + b f_{k-1,2+k} = |\lambda_1|^{k+1} \cos(k+1)\phi,$$

$$f_{k,2+k} \sin\phi = |\lambda_1|^k \sin(k+1)\phi.$$

В случае разностных уравнений порядка большего двух с постоянными коэффициентами при использовании формул (5), (25) общего решения такого уравнения получим новые более сложные комбинаторные формулы.

1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
3. *Романенко В. К.* Разностные уравнения. – М.: Бином, 2006. – 112 с.
4. *Круглов В. Е.* Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения порядка n // Сучасні проблеми механіки та математики: Тези доп. конф. (Львів, 25 – 29 травня 2008 р.). – Львів, 2008. – **3**. – С. 69 – 71.
5. *Wimp J.* Computation with recurrence relations. – Boston etc.: Pitman, 1984. – 309 p.
6. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 375 с.
7. *Круглов В. Е.* Решение уравнения типа Пуанкаре – Перрона второго порядка и сводящихся к нему дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 900 – 917.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища шк., 1988. – 439 с.
9. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1983. – 70 с.

Получено 09.12.08,
после доработки — 16.03.09