УДК 517.51

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОРТОПРОЕКЦИОННЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We obtain exact order estimates of trigonometric and orthoprojective widths of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ and the Nikolsky classes H^r_p of periodic functions of many variables in the space L_q for some relations between parameters p and q.

Одержано точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ і Нікольського H^r_p періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Введение. В настоящей работе изучаются тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ и Никольского H^r_p периодических функций многих переменных в пространстве L_q, $1 \le p,\ q \le \infty$. Указанные аппроксимативные характеристики исследуемых классов функций будут определены в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, обозначает d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, а $L_p(T^d)$, $T^d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{T^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in T^d} |f(x)| < \infty.$$

Пусть, далее, $k \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(T^d)$ обозначим

$$\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и определим кратную разность порядка k функции $f(x)$ в точке x с шагом h по формуле

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \Delta_h^{k-1} f(x), \qquad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Кратную разность $\Delta_h^k f(x)$ можно также записать в виде

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l+k} C_k^l f(x + lh).$$

Отправляясь от $\Delta_h^k f(x)$, определим модуль k-го порядка функции $f \in L_p(T^d)$, который обозначим $\omega_k(f,t)_p$, согласно формуле

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^k f\|_p,$$

где $|h|$ — евклидова норма h.

Будем говорить, что функция $f \in L_p(T^d)$ принадлежит пространству $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le\ p \le \infty$, $r > 0$, если

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-r}\omega_k(f,t)_p\right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

и

$$\sup_{t>0} \omega_k(f,t)t^{-r} < \infty, \qquad \theta = \infty.$$

При этом предполагается, что $k > r$.

Норма в пространстве $B^r_{p,\theta}$ задается формулами

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$
$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p\, t^{-r}. \tag{1}$$

Пространства $B^r_{p,\theta}$ введены О. В. Бесовым [1], причем $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, где H^r_p — пространства, введенные С. М. Никольским [2]. Таким образом, класс $B^r_{p,\theta}$ — это множество функций $f \in L_p(T^d)$, для которых $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1$.

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным (с точностью до абсолютных постоянных) определением классов $B^r_{p,\theta}$.

Пусть $V_m(z)$, $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_m(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kz + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kz.$$

Многомерное ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, определим по формуле

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Для функции $f \in L_p(T^d)$ рассмотрим оператор свертки V_m этой функции с ядром $V_m(x)$, т. е.

$$V_m f = f * V_m.$$

Таким образом с помощью оператора V_m определяется кратная сумма Валле Пуссена функции $f(x)$:

$$V_m(f,x) = V_m f.$$

Для $f \in L_p(T^d)$ положим

$$\sigma_0(f,x) = V_1(f,x), \qquad \sigma_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x), \quad s = 1,2,\ldots.$$

В принятых обозначениях (с точностью до абсолютных постоянных) классы $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $r > 0$, можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r\,\theta} \, \|\sigma_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$
$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r} \, \|\sigma_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \tag{2}$$

Заметим, что в случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентные определения классов $B^r_{p,\theta}$, используя в (2) вместо $\sigma_s(f,x)$ „блоки" ряда Фурье функции $f(x)$.

Для $f \in L_p(T^d)$ обозначим

$$f_0(x) = \widehat{f}(0), \qquad f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s \\ j = \overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,\,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $(k,x) = k_1\,x_1 + \ldots + k_d\,x_d$, и $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{T^d} f(t)\, e^{-i(k,\,t)} dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$. Тогда

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r\,\theta} \, \|f_s(x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$
$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{s\,r} \, \|f_s(x)\|_p \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \tag{2$'$}$$

Отметим, что с увеличением параметра θ классы $B^r_{p,\theta}$ расширяются, т. е. при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$

$$B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\theta'} \subset B^r_{p,\infty} = H^r_p.$$

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ запись $\mu_1 \asymp \mu_2$ означает, что существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любого $n \in N$ $C_1\mu_1(n) \le \mu_2(n) \le C_2\mu_1(n)$. Если только $\mu_2(n) \le C\mu_1(n)$ или $\mu_2(n) \ge C\mu_1(n)$, то соответственно пишем $\mu_2(n) \ll \mu_1(n)$ и $\mu_2(n) \gg \mu_1(n)$. Все постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться ниже, могут зависеть только от параметров, содержащихся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

1. Тригонометрический поперечник классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q. Пусть $F \subset L_q(T^d)$ — некоторый функциональный класс. Тригонометрический m-поперечник класса F в пространстве L_q (обозначается $d^T_m(F, L_q)$) определяется по формуле [4]

$$d^T_m(F, L_q) = \inf_{\Omega_m} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_m;x)} \big\| f(x) - t(\Omega_m; x) \big\|_q,$$

где

$$t(\Omega_m; x) = \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j,x)}, \quad \Omega_m = \{k^1, \ldots, k^m\}$$

— набор векторов $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d)$, $j = \overline{1,m}$, из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, c_j — произвольные числа.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству полученного результата, приведем известные утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

Теорема А [2]. *Пусть* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, *и*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $1 \le q < p \le \infty$ *выполняется неравенство*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q. \tag{3}$$

Неравенство (3) доказано С. М. Никольским и называется „неравенством разных метрик”. В случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [5].

Лемма А [6]. *Пусть* $2 \le q < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$P(\Omega_m; x) = \sum_{j=1}^{m} e^{i(k^j,x)}$$

и для любого $n \le m$ *найдутся тригонометрический полином* $\widetilde{P}(\Omega_n; x)$, *содержащий не более* n *гармоник, и постоянная* $C_q > 0$ *такие, что*

$$\left\| P(\Omega_m; x) - \widetilde{P}(\Omega_n; x) \right\|_q \le C_q\, m n^{-1/2},$$

причем $\Omega_n \subset \Omega_m$, *все коэффициенты* $\widetilde{P}(\Omega_n; x)$ *одинаковы и не превышают по абсолютной величине* mn^{-1}.

Теорема Б [3]. *Пусть* $f \in L_p(T^d)$, $1 < p < \infty$. *Тогда существуют постоянные* $C_1(p)$ *и* $C_2(p)$ *такие, что*

$$C_1(p)\|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |f_s|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2(p)\|f\|_p. \tag{4}$$

При доказательстве оценок снизу поперечников $d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$ будем использовать известные оценки наилучших m-членных тригонометрических приближений функций из классов $B_{p,\theta}^r$. Для формулировки соответствующего результата приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $f \in L_q(T^d)$ и $\{k^j\}_{j=1}^m$ – произвольный набор d-мерных векторов $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$ с целочисленными координатами.

Тогда величина

$$e_m(f)_q = \inf_{k^j,\, c_j} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j\, e^{i(k^j,x)} \right\|_q,$$

где c_j — произвольные комплексные числа, называется наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции $f(x)$. Для функционального класса $F \subset L_q(T^d)$ полагаем

$$e_m(F)_q = \sup_{f\in F} e_m(f)_q.$$

Заметим, что, как следует непосредственно из определений, для $e_m(F)_q$ и $d_m^T(F, L_q)$ справедливо соотношение

$$e_m(F)_q \le d_m^T(F, L_q). \tag{5}$$

Теорема B [7]. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *и*

$$r(p,q) := \begin{cases} d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+, & 1 \le p \le q \le 2 \ \text{ или } \ 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\left\{\dfrac{d}{p}; \dfrac{d}{2}\right\} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда для $r > r(p,q)$

$$e_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r/d + (1/p - \max\{1/q; 1/2\})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Теперь сформулируем и докажем полученное утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < 2 \le q < \dfrac{p}{p-1}$, $r > d$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$d_m^T(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp m^{-r/d + 1/p - 1/2}. \tag{6}$$

Доказательство. Оценка снизу в (6) $\left(\text{даже при } r > \dfrac{d}{p}\right)$ следует из теоремы B согласно соотношению (5). Оценку сверху в (6) достаточно получить для классов H^r_p.

Итак, по числу $m \in \mathbb{N}$ подберем $l \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось соотношение $2^{(l-1)d-1} \le m \le 2^{ld-1}$ и положим

$$\alpha = \left(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right) \Big/ \left(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Для $s = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим

$$n_s = \begin{cases} 2^{sd}, & 0 \le s < l, \\ \left[2^{lr} 2^{sd(1-r/d)}\right], & l \le s \le [\alpha l] + 1, \\ 0, & s > [\alpha l] + 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Тогда, принимая во внимание, что $r > d$, записываем

$$\sum_s n_s \le \sum_{s=0}^{l-1} 2^{sd} + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{lr} 2^{sd(1-r/d)} \ll$$

$$\ll 2^{ld} + 2^{lr} \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd(1-r/d)} \ll 2^{ld} + 2^{lr} \cdot 2^{ld(1-r/d)} = 2 \cdot 2^{ld} \asymp m.$$

Далее, обозначим через $\mu(s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, подмножества целочисленной решетки вида

$$\mu(s) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s-1} \le \max_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s \right\}$$

и рассмотрим тригонометрический полином

$$t_s(x) = \sum_{k \in \mu(s)} e^{i(k,x)}.$$

Пусть $t(\Omega_{n_s}; x)$ обозначает тригонометрический полином, приближающий полином $t_s(x)$ согласно лемме А, т. е.

$$\|t_s(x) - t(\Omega_{n_s}; x)\|_q \ll 2^{sd} n_s^{-1/2},$$

при этом $\Omega_{n_s} \subset \mu(s)$, все коэффициенты $t(\Omega_{n_s}; x)$ одинаковы и не превышают $2^{(s+1)d} n_s^{-1}$.

Построим подпространство тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из объединения множеств $P = \bigcup\limits_{0 \le s < l} \mu(s)$ и $Q = \bigcup\limits_{l \le s \le [\alpha l] + l} \Omega_{n_s}$, приближение которым класса H_p^r в пространстве L_q реализует порядок поперечника $d_m^T(H_p^r, L_q)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса H_p^r. Рассмотрим для $f(x)$ приближающий полином с „номерами" гармоник из $P \cup Q$ вида

$$t(x) = \sum_{s=0}^{l-1} f_s(x) + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left(t(\Omega_{n_s}; x) * f_s(x)\right). \tag{8}$$

Тогда

$$\big\| f(x) - t(x) \big\|_q \le \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} f_s(x) - \big(f_s(x) * t(\Omega_{n_s}; x)\big) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{s > [\alpha l]+1} f_s(x) \right\|_q = J_1 + J_2. \tag{9}$$

Установим сначала оценку сверху для слагаемого J_2. Поскольку для $f \in H_p^r$ выполнено неравенство $\|\sigma_s(f, x)\|_p \le 2^{-sr}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, согласно неравенствам Минковского и (3) можем записать

$$J_2 = \left\| \sum_{s > [\alpha l]+1} f_s(x) \right\|_q \le \sum_{s > [\alpha l]+1} \|f_s(x)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s > [\alpha l]+1} 2^{sd(1/p - 1/q)} \big\| \sigma_s(f, x) \big\|_p \le$$

$$\le \sum_{s > [\alpha l]+1} 2^{-sd(r/d - 1/p + 1/q)} \ll 2^{-\alpha l d(r/d - 1/p + 1/q)}. \tag{10}$$

Принимая во внимание значение α, из (10) находим

$$J_2 \ll 2^{-ld(r/d-1/p+1/2)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/2}. \tag{11}$$

Перейдем к установлению оценки сверху слагаемого J_1. С этой целью для каждого числа s, удовлетворяющего соотношениям $l \leq s \leq [\alpha l]+1$, рассмотрим линейный оператор T_s, действующий на функцию $f(x)$ следующим образом:

$$T_s f(x) = f(x) * (t_s(x) - t(\Omega_{n_s}; x)).$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < 2 < q < \dfrac{p}{p-1}$. Тогда норма оператора T_s, действующего из L_p в $L_q\big(\|T_s\|_{p\to q}\big)$, удовлетворяет соотношению*

$$\|T_s\|_{p\to q} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|T_s f\|_q \ll 2^{sd} n_s^{-(1/2+1/p')},$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Доказательство. Согласно интерполяционной теореме Рисса – Торина (см., например, [8, с. 144])

$$\|T_s\|_{p\to q} \leq \|T_s\|_{2\to 2}^{1-\lambda} \; \|T_s\|_{1\to q^*}^{\lambda}, \tag{12}$$

где параметры λ и q^* определяются из соотношений

$$\lambda = \frac{2}{p} - 1, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{q^*}.$$

Оценим величины $\|T_s\|_{2\to 2}$ и $\|T_s\|_{1\to q^*}$. Принимая во внимание, что коэффициенты полинома $t_s(x) - t(\Omega_{n_s}; x)$ одинаковы и не превышают по модулю $2^{(s+1)d} n_s^{-1} + 1$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|T_s\|_{2\to 2} \ll 2^{sd} n_s^{-1}. \tag{13}$$

Далее, воспользовавшись обобщенным неравенством Минковского и леммой А, можем записать

$$\|T_s f\|_{q^*} \leq \|f\|_1 \; \|t_s(x) - t(\Omega_{n_s}; x)\|_{q^*} \ll \|f\|_1 2^{sd} n_s^{-1/2}.$$

Отсюда, согласно определению $\|T_s\|_{1\to q^*}$, находим

$$\|T_s\|_{1\to q^*} \ll 2^{sd} n_s^{-1/2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) и (13) в (12) и выполняя элементарные преобразования, получаем требуемую оценку.

Лемма доказана.

Итак, переходя непосредственно к доказательству оценки слагаемого J_1, сначала предполагаем, что $p \in (1,2)$. В таком случае, ипользуя последовательно теорему Б, неравенство Минковского и лемму 1, получаем

$$J_1 \leq \left\| \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} |f_s(x) - (f_s(x) * t(\Omega_{n_s}; x))|^2 \right)^{1/2} \right\|_q =$$

$$= \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} |f_s(x) - (f_s(x) * t(\Omega_{n_s}; x))|^2 \right\|_{q/2}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\| \left| f_s(x) - (f_s(x) * t(\Omega_{n_s}; x)) \right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \| f_s(x) - (f_s(x) * t(\Omega_{n_s}; x)) \|_q^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \| T_s f_s \|_q^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \| T_s \|_{p \to q}^2 \, \| f_s(x) \|_p^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, n_s^{-(1+\frac{2}{p'})} \| f_s(x) \|_p^2 \right)^{1/2}. \tag{15}$$

Подставляя в (15) вместо n_s их значения из (7) и выполняя элементарные преобразования, имеем

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, 2^{-lr(1+2/p')} \, 2^{-sd(1-r/d)(1+2/p')} \| f_s(x) \|_p^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{-lr(1/2+1/p')} \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd(2/p-1)(1-r/d)} \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Поскольку согласно условиям теоремы выполнены неравенства $1 - \dfrac{r}{d} < 0$ и $\dfrac{2}{p} - 1 > 0$, из (16) находим

$$J_1 \ll 2^{-lr(1/2+1/p')} \cdot 2^{ld(1/p-1/2)(1-r/d)} = 2^{-ld(r/d-1/p+1/2)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/2}. \tag{17}$$

Таким образом, подставляя (17) и (11) в (9), получаем оценку

$$\| f(x) - t(x) \|_q \ll m^{-r/d+1/p-1/2}, \quad 1 < p < 2 \leq q < \frac{p}{p-1}.$$

Отсюда следует искомая оценка сверху для тригонометрического поперечника $d_m^T(H_p^r, L_q)$, $1 < p < 2 \leq q < \dfrac{p}{p-1}$, а следовательно, и для поперечника $d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 \leq \theta < \infty$.

Для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку сверху для тригонометрического поперечника $d_m^T(H_1^r, L_q)$, $2 \leq q < \infty$.

Пусть q_1 — число, удовлетворяющее условию $1 < q_1 < 2$, которое будет уточнено ниже. Далее, повторяя для оценки сверху величины J_1 рассуждения, использованные в случае $1 < p < 2$, получаем

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s f_s(x)\|_q^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s\|_{q_1 \to q}^2 \|f_s(x)\|_{q_1}^2 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s\|_{q_1 \to q}^2 \|\sigma_s(f,x)\|_{q_1}^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} n_s^{-(1+2/q_1')} \|\sigma_s(f,x)\|_{q_1}^2 \right)^{1/2}. \tag{18}$$

Теперь, применяя к $\|\sigma_s(f,x)\|_{q_1}$ неравенство разных метрик и подставляя в (18) вместо n_s их значения из (7), после элементарных преобразований имеем

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} n_s^{-(1+2/q_1')} 2^{2sd(1-1/q_1)} \|\sigma_s(f,x)\|_1^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^{(-lr/2)(1+2/q_1')} \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd+2sr/q_1'-sr} \right)^{1/2}.$$

Наконец, подбирая число $q_1' > 2$ из условия $sd + \dfrac{2sr}{q_1'} - sr < 0$ (это возможно, поскольку по условию теоремы $r > d$), получаем оценку

$$J_1 \ll 2^{(-lr/2)(1+2/q_1')} 2^{ld/2+lr/q_1'-lr/2} = 2^{-lr+ld/2} = 2^{-ld(r/d-1/2)} \asymp m^{-r/d+1/2}.$$

Отсюда с учетом полученной выше оценки сверху величины J_2 следует искомая оценка сверху для поперечника $d_m^T(H_1^r, L_q)$, а следовательно, и для $d_m^T(B_{1,\theta}^r, L_q)$, $1 \leq \theta < \infty$.

Теорема доказана.

В заключение этой части работы приведем некоторые замечания.

***Замечание* 1.** Непосредственно из доказательства теоремы 1 следует, что порядок поперечника $d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 \leq p < 2 < q < \dfrac{p}{p-1}$, не реализуется подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из множества $P = \bigcup\limits_{0 \leq s < l} \mu(s)$, $2^{ld} \asymp m$.

Если же $1 \leq p \leq q \leq 2$ или $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то, как следует из теоремы В и результатов, полученных ниже, подпространство тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из множества P является экстремальным (в смысле порядковых оценок) для поперечников $d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$.

Кроме того, в этих случаях, а также в случае теоремы 1 имеет место соотношение

$$d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp e_m(B_{p,\theta}^r, L_q).$$

***Замечание* 2.** Вопрос о порядках поперечников $d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q)$ в случаях $2 \leq$ $\leq p < q \leq \infty$ и $1 < p < 2$, $p' < q \leq \infty$ остается, по-видимому, открытым.

2. Ортопроекционные поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q. Сначала приведем определения величин, которые будут исследованы в этом пункте.

Пусть $\big\{u_i(x)\big\}_{i=1}^m$ — ортонормированная в пространстве $L_2(T^d)$ система функций $u_i \in L_\infty(T^d)$. Каждой функции $f \in L_q(T^d)$, $1 \le q \le \infty$, поставим в соответствие аппарат приближения вида $\sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i(x)$, т. е. ортогональную проекцию функции $f(x)$ на подпространство, порожденное системой функций $\big\{u_i(x)\big\}_{i=1}^m$. Здесь и далее $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{T^d} f(x) \overline{u_i(x)}\, dx$.

Если $F \subset L_q(T^d)$ — некоторый функциональный класс, то величина

$$d_m^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i(x) \right\|_q \tag{19}$$

называется ортопроекционным поперечником этого класса в пространстве $L_q(T^d)$. Поперечник $d_m^{\perp}(F, L_q)$ введен В. Н. Темляковым [9].

Параллельно с поперечниками $d_m^{\perp}(B^r_{p,\theta}, L_q)$ будем исследовать величины $d_m^B(F, L_q)$, $F = B^r_{p,\theta}$, также рассмотренные В. Н. Темляковым [9], которые определяются следующим образом:

$$d_m^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \big\| f(x) - Gf(x) \big\|_q. \tag{20}$$

Здесь через $L_m(B)_q$ обозначено множество линейных операторов G, удовлетворяющих условиям:

а) область определения $\mathcal{D}(G)$ этих операторов содержит все тригонометрические полиномы, а их область значений содержится в подпространстве размерности m пространства $L_q(T^d)$;

б) число $B \ge 1$ и для всех векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ выполнено неравенство

$$\|G e^{i(k,x)}\|_2 \le B.$$

Отметим, что к $L_m(1)_2$ принадлежат операторы ортогонального проектирования на подпространства размерности m в $L_q(T^d)$, а также операторы, которые задаются на ортонормированной системе функций с помощью мультипликатора, определяющегося последовательностью $\{\lambda_l\}$ такой, что $|\lambda_l| \le 1$ для всех l.

Легко видеть, что согласно определениям величины $d_m^{\perp}(F, L_q)$ и $d_m^B(F, L_q)$ связаны между собой неравенством

$$d_m^B(F, L_q) \le d_m^{\perp}(F, L_q). \tag{21}$$

Следовательно, оценки (снизу) величин $d_m^B(F, L_q)$ могут служить оценками снизу для ортопроекционных поперечников $d_m^{\perp}(F, L_q)$ и, наоборот, оценки (сверху) поперечников $d_m^{\perp}(F, L_q)$ можно использовать для оценок сверху величин $d_m^B(F, L_q)$. Это обстоятельство будет использоваться при доказательстве соответствующих утверждений. Отметим также, что при доказательстве оценок снизу величин $d_m^B(B^r_{p,\theta}, L_q)$ будем использовать метод, который применялся В. Н. Темляковым при доказательстве оценок величин $d_m^B(F, L_q)$ для других функциональных классов F (см., например, [9–11]). Суть этого метода состоит в построении функций, принадлежащих классам $B^r_{p,\theta}$, которые „плохо” приближаются с помощью операторов G.

Кроме перечисленных выше работ ортопроекционные поперечники классов функций как одной, так и многих переменных изучались также в работах [12 – 15].

Теперь перейдем к формулировке и доказательству полученных результатов.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq p < q < \infty$, $r > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$. *Тогда при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *имеют место соотношения*

$$d_m^B(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp d_m^\perp(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp m^{-r/d+1/p-1/q}. \tag{22}$$

Доказательство. Установим сначала оценку сверху в (22). Заметим, что в силу соотношения (21) и вложения $B_{p,\theta}^r \subset H_p^r$, $1 \leq \theta < \infty$, достаточно получить необходимую оценку сверху величины $d_m^\perp(H_p^r, L_q)$.

Итак, по заданному достаточно большому $m \in \mathbb{N}$ подберем число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^{(n+1)d} \leq m < 2^{(n+2)d}$ и рассмотрим для $f \in H_p^r$ приближение ее частной суммой Фурье вида

$$S_n(f,x) = \sum_{s=0}^{n} f_s(x).$$

Отметим, что количество гармоник в $S_n(f,x)$ равно $\sum_{s=0}^{n} |\mu(s)|$ и не превышает $2^{(n+1)d}$. Здесь и далее через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^d$.

Поскольку для $f \in H_p^r$ выполнено соотношение $\|\sigma_s(f,x)\|_p \leq 2^{-sr}$, согласно неравенствам Минковского и разных метрик Никольского можно записать

$$\big\|f(x) - S_n(f,x)\big\|_q = \left\|\sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x)\right\|_q \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_s(x)\|_q \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f,x)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p-1/q)} \|\sigma_s(f,x)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd(r/d-1/p+1/q)} \asymp 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)}.$$

Отсюда в силу монотонности поперечников по размерности приближающего пространства имеем

$$d_m^B(H_p^r, L_q) \leq d_m^\perp(H_p^r, L_q) \leq \sup_{f \in H_p^r} \big\|f(x) - S_n(f,x)\big\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)} \ll m^{-r/d+1/p-1/q}.$$

Переходя к доказательству оценок снизу в (22), заметим, что соответствующую оценку достаточно получить для величины $d_m^B(B_{p,1}^r, L_q)$. Предварительно сделаем некоторые замечания и приведем вспомогательные утверждения, которые будут при этом использоваться.

Ниже, при оценке снизу величин $d_m^B(F, L_q)$, $F \subset L_q$, будем считать, что операторы G принадлежат множеству $L_m(B)_2$. В случае $q \geq 2$ условие $G \in L_m(B)_2$ является непосредственным следствием условия $G \in L_m(B)_q$, а при $q < 2$ условие $G \in L_m(B)_2$, как следует из процесса установления оценок снизу и из приведенных ниже рассуждений, не является ограничительным.

В самом деле, пусть

$$V_L(x) = \prod_{j=1}^{d} V_L(x_j)$$

— ядро Валле Пуссена для куба $[-L; L]^d$ с ребром $2L + 1$ и

$$V_L f = f * V_L.$$

Известно (см., например, [16, с. 119]), что для любого тригонометрического полинома $t(x)$ с „номерами" гармоник из $[-L; L]^d$ и любой функции $f \in L_q(T^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, выполнены соотношения

$$V_L t = t, \qquad \|V_L f\|_q \leq 3^d \|f\|_q.$$

Пусть $G \in L_m(B)_q$. Рассмотрим оператор $A = V_L G$. Тогда, очевидно, $A \in L_m(B)_2$ и для любого тригонометрического полинома с „номерами" гармоник из $[-L; L]^d$ можем записать

$$\|t - At\|_q \leq 3^d \|t - Gt\|_q. \tag{23}$$

Из этого неравенства следует, что при получении порядковых оценок снизу величин $d_m^B(F \cap \mathcal{T}; L_q)$ где $\mathcal{T}$ — множество тригонометрических полиномов, условия $G \in$ $\in L_m(B)_2$ и $G \in L_m(B)_q$ равносильны.

Итак, пусть оператор $G \in L_m(B)_2$ и для любого вектора $k = (k_1, \ldots, k_d)$

$$G e^{i(k,x)} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(x),$$

где $\overline{m}$ — размерность подпространства в $L_2(T^d)$ значений оператора G, а $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормированный базис в этом подпространстве. Заметим, что $\overline{m} \leq m$ и для всех $k = (k_1, \ldots, k_d)$

$$\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2 \leq B^2, \tag{24}$$

а также для произвольного l

$$\sum_{k} \left|\widehat{\psi}_l(k)\right|^2 \leq 1. \tag{25}$$

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение, полученное В. Н. Темляковым (см., например, [10]).

Лемма Б. *Пусть A – линейный оператор такой, что для произвольного* $k =$ $= (k_1, \ldots, k_d)$

$$Ae^{i(k,x)} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(x),$$

где $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^{\overline{m}}$ *— заданная система функций, для которой* $\|\psi_l(x)\|_2 \le 1$, $l = \overline{1, m}$.

Тогда для любого тригонометрического полинома $t(x)$ *будет выполнено неравенство*

$$\min_{y=x} \operatorname{Re} At(x-y) \le \left\{ \overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_k \left| a_l^k \, \widehat{t}(k) \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Теперь перейдем непосредственно к получению оценки снизу величины $d_m^B(B_{p,1}^r, L_q)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(x) = e^{i(k^n, x)} \prod_{j=1}^{d} K_{2^{n-2}-1}(x_j),$$

где

$$K_{l-1}(t) = \sum_{|k| \le l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l} \right) e^{ikt}$$

— ядро Фейера порядка l, $K_m(t) \equiv 1$ при $m < 0$ и $k^n = (k_1^n, \ldots, k_d^n)$,

$$k_j^n = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-2}, & n \ge 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Далее обозначим

$$\rho(n) := \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{n-1} \le |k_j| < 2^n, \ j = \overline{1, d} \right\}$$

и $T(\rho(n))$ — множество тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из $\rho(n)$. Заметим, что „номера" гармоник функции φ_n (их множество обозначим через Q_n) принадлежат множеству $\rho(n)$. Соответственно через $T(\mu(n))$ обозначим множество тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из $\mu(n)$. Заметим, что $\rho(n) \subset \mu(n)$ и соответственно $T(\rho(n)) \subset T(\mu(n))$.

Пусть задан оператор $G \in L_m(B)_q$, $m < |Q_n|$. Рассмотрим оператор A вида

$$A = (S_n - S_{n-1})G.$$

Тогда $A \in L_m(B)_q$ и областью значений оператора A является подпространство $A_m \subset T(\mu(n))$ размерности $\dim A_m = \overline{m} \le m$. Кроме того, вследствие теоремы Б

$$\|S_l\|_{q \to q} \le C(d, q), \quad 1 < q < \infty, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

и поэтому для $f \in T(\mu(n))$ можем записать

$$\|f - Af\|_q = \|(S_n - S_{n-1})(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q$$

и, как следствие,

$$\inf_{A \in L_m(B)_q} \sup_{f \in B_{p,\theta}^r \cap T(\mu(n))} \|f - A\,f\|_q \ll d_m^B(B_{p,\theta}^r, L_q), \tag{26}$$

где $\inf$ берется по множеству $L_m(B)_q$ операторов A с областью значений $A_m \subset \subset T(\mu(n))$.

Установим оценки снизу величин в левой части соотношения (26).

Пусть сначала $q = \infty$. Рассмотрим величину

$$I = \sup_y \left\| \varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y) \right\|_\infty .$$

Легко видеть, что

$$I \geq \varphi_n(0) - \min_{y=x} \operatorname{Re} A\varphi_n(x-y). \tag{27}$$

Оценим каждое слагаемое правой части (27). Согласно определению функции $\varphi_n(x)$ можем записать

$$\varphi_n(0) \geq C_d\,|Q_n|, \quad C_d > 0. \tag{28}$$

Далее, пусть $\left\{\psi_l(x)\right\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормированный базис в A_m и

$$Ae^{i(k,x)} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(x).$$

Тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2 \right)^{1/2} \leq B$$

и в силу леммы Б имеем

$$\min_{y=x} \operatorname{Re} A\varphi_n(x-y) \leq \left\{ \overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{k \in Q_n} |a_l^k\, \widehat{\varphi}_n(k)|^2 \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{ \overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{k \in Q_n} |a_l^k\,|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \overline{m} \sum_{k \in Q_n} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k\,|^2 \right\}^{1/2} \leq B(m\,|Q_n|)^{1/2}. \tag{29}$$

Теперь по заданному достаточно большому $n \in \mathbb{N}$ подберем постоянные $0 < C_1 < < C_2 < 1$ так, чтобы $C_1\, 2^{nd} \leq m < C_2\, 2^{nd}$ и выполнялось неравенство

$$C_d|Q_n| > 2B(m|Q_n|)^{1/2}.$$

Тогда в силу (27) – (29), учитывая, что $|Q_n| \asymp 2^{nd}$, получаем

$$I = \sup_y \left\| \varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y) \right\|_\infty \geq$$

$$\geq C_d|Q_n| - B(m|Q_n|)^{1/2} > B(m|Q_n|)^{1/2} \gg 2^{nd}.$$

Следовательно, найдется y^* такое, что

$$\left\| \varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*) \right\|_\infty \gg 2^{nd}. \tag{30}$$

Пусть теперь имеет место случай $1 < q < \infty$. Поскольку полиномы $t \in T(\mu(n))$ имеют степень не выше 2^n по каждой переменной x_j, $j = \overline{1,d}$, согласно неравенству разных метрик Никольского можем записать

$$\|t\|_\infty \ll 2^{nd/q}\|t\|_q.$$

Следовательно, из (30) находим

$$\big\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\big\|_q \gg$$
$$\gg 2^{-nd/q}\big\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\big\|_\infty \gg 2^{-nd/q}2^{nd} = 2^{nd(1-1/q)}. \qquad (31)$$

Для завершения доказательства оценки снизу величины $d_m^B(B_{p,1}^r, L_q)$ рассмотрим функцию

$$g(x) = C2^{-nd(r/d+1-1/p)}\varphi_n(x), \quad C > 0.$$

Поскольку в силу свойства ядра Фейера

$$\|\sigma_n(\varphi_n, x)\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)},\ 1 \le p \le \infty,$$

согласно определению $\|\varphi_n\|_{B_{p,1}^r}$ можно записать

$$\|\varphi_n\|_{B_{p,1}^r} = \sum_s 2^{sr}\|\sigma_s(\varphi_n, x)\|_p \asymp$$
$$\asymp 2^{nr}\|\sigma_n(\varphi_n, x)\|_p \asymp 2^{nr}\cdot 2^{nd(1-1/p)} = 2^{nd(r/d+1-1/p)}.$$

Отсюда следует, что при соответствующем выборе постоянной $C > 0$ функция $g(x)$ принадлежит классу $B_{p,1}^r$.

Таким образом, используя оценки (30) и (31) соответственно при $q = \infty$ и $1 < q < \infty$, на основании (26) получаем

$$d_m^B(B_{p,\theta}^r; L_q) \gg d_m^B(B_{p,1}^r; L_q) \gg \big\|g(x-y^*) - Ag(x-y^*\big\|_q \gg$$
$$\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)}\big\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\big\|_q \gg$$
$$\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)}\cdot 2^{nd(1-1/q)} = 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/q}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

***Замечание* 3.** Сопоставив оценки (6) и (22) при $1 \le p < 2 \le q < \dfrac{p}{p-1}$, $r > d$ и $1 \le \theta \le \infty$, можем записать

$$d_m^T(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp d_m^\perp(B_{p,\theta}^r, L_q)m^{1/q-1/2}.$$

В следующем утверждении установлены порядки рассматриваемых величин для других соотношений между параметрами p и q.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ *и* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \ne (1,1)$, (∞,∞). *Тогда*

$$d_m^B(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp d_m^\perp(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp m^{-r/d}. \qquad (32)$$

Доказательство. Как и в случае предыдущей теоремы, для доказательства оценок сверху в (32) достаточно установить их для поперечника $d_m^{\perp}(H_p^r, L_q)$. Подберем по заданному достаточно большому $m \in \mathbb{N}$ число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^{(n+1)d} \le m < 2^{(n+2)d}$ и рассмотрим приближение функции $f \in H_p^r$ ее частной суммой Фурье $S_n(f,x)$.

Пусть сначала имеет место случай $1 < p = q < \infty$. Тогда для $f \in H_q^r$ в силу неравенства Минковского и соотношения $\|f_s\|_q \le 2^{-sr}$ имеем

$$\big\|f(x) - S_n(f,x)\big\|_q = \left\|\sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x)\right\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \big\|f_s(x)\big\|_q \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp m^{-r/d}$$

и

$$d_m^B(H_p^r, L_q) \le d_m^{\perp}(H_p^r, L_q) \le \sup_{f \in H_p^r} \|f(x) - S_n(f,x)\|_q \ll m^{-r/d}. \qquad (33)$$

В случае $1 < q < p < \infty$ искомые оценки следуют из (33) с учетом вложения $H_p^r \subset H_q^r$. Действительно,

$$d_m^B(H_p^r, L_q) \le d_m^{\perp}(H_p^r, L_q) \le d_m^{\perp}(H_q^r, L_q) \ll m^{-r/d}. \qquad (34)$$

Для оставшихся соотношений между параметрами p и q необходимые оценки рассматриваемых величин следуют из (34). Именно, при $q = 1$ и $p \in (1, \infty]$, используя неравенство $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_s$, $1 < s < p$, и оценку (34), получаем

$$d_m^B(H_p^r, L_1) \le d_m^{\perp}(H_p^r, L_1) < d_m^{\perp}(H_p^r, L_s) \ll m^{-r/d}.$$

Если $1 < q < \infty$, $p = \infty$, то в силу вложения $H_\infty^r \subset H_q^r$ и оценки (34) можем записать

$$d_m^B(H_\infty^r, L_q) \le d_m^{\perp}(H_\infty^r, L_q) \le d_m^{\perp}(H_q^r, L_q) \ll m^{-r/d}.$$

Оценки сверху для величин $d_m^B(H_p^r, L_q)$ и $d_m^{\perp}(H_p^r, L_q)$, а следовательно, и для величин $d_m^B(B_{p,\theta}^r, L_q)$ и $d_m^{\perp}(B_{p,\theta}^r, L_q)$, $1 \le \theta < \infty$, доказаны.

Переходя к доказательству оценок снизу в (32), заметим, что достаточно установить их для величины $d_m^B(B_{\infty,1}^r, L_1)$. Кроме того, в силу приведенного в начале пункта замечания будем считать, что для операторов приближения функций из классов $B_{\infty,1}^r$ выполнено условие $G \in L_m(B)_2$.

Итак, пусть $G \in L_m(B)_2$ и n таково, что

$$\big|\mu(n-1)\big| < 4B^2 m \le |\mu(n)|,$$

где, напомним, $|\mu(l)|$ — количество элементов множества $\mu(l) \subset \mathbb{Z}^d$.

Рассмотрим приближение функций $e^{i(k,x)}$, $k \in \mu(n)$, операторами $G \in L_m(B)_2$. Обозначим

$$\beta_k = \big(Ge^{i(k,x)}, e^{i(k,x)}\big).$$

Тогда, поскольку

$$Ge^{i(k,x)} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(x),$$

то

$$\beta_k = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \widehat{\psi}_l(k)$$

и

$$|\beta_k|^2 \le B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} \left|\widehat{\psi}_l(k)\right|^2$$

Следовательно, в силу условий (24) и (25) будем иметь

$$\sum_{k\in\mu(n)} |\beta_k|^2 \le B^2 \sum_{k\in\mu(n)} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(k)|^2 = B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{k\in\mu(n)} |\widehat{\psi}_l(k)|^2 \le B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} 1 = B^2\overline{m}.$$

Отсюда, учитывая выбор числа n, заключаем, что найдется вектор $k^0 \in \mu(n)$ такой, что $|\beta_{k^0}| \le \dfrac{1}{2}$. В таком случае можем записать

$$\frac{1}{2} \le |1-\beta_{k^0}| = \left|(e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)}, e^{i(k^0,x)})\right| \le \left\|e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)}\right\|_1. \qquad (35)$$

Наконец, принимая во внимание изложенное выше и используя соотношения (35) для $G \in L_m(B)_1$, имеем

$$\left\|e^{i(k^o,x)} - Ge^{i(k^o,x)}\right\|_1 \ge \frac{1}{2}3^{-d}. \qquad (36)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g_1(x) = 2^{-nr}e^{i(k^o,x)}.$$

Поскольку

$$\|g_1\|_{B^r_{\infty,1}} = \sum_s 2^{sr}\|\sigma_s(g_1,x)\|_\infty = 2^{nr}\|\sigma_n(g_1,x)\|_\infty = 2^{nr}\cdot 2^{-nr} = 1,$$

отсюда следует, что $g_1 \in B^r_{\infty,1}$.

Таким образом, используя оценку (36), получаем

$$\left\|g_1(x) - Gg_1(x)\right\|_1 = 2^{-nr}\left\|e^{i(k^o,x)} - Ge^{i(k^o,x)}\right\|_1 \gg 2^{-nr}.$$

Отсюда

$$d_m^{\perp}(B^r_{\infty,1}, L_1) \ge d_m^B(B^r_{\infty,1}, L_1) \gg m^{-r/d}.$$

Теорема доказана.

В заключение установим порядок величин $d_m^B(B^r_{p,\theta}, L_p)$, $p=1$ и $p=\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $r>0$, $1\le\theta\le\infty$. Тогда при $p=1$ или $p=\infty$*

$$d_m^B(B^r_{p,\theta}, L_p) \asymp m^{-r/d}. \qquad (37)$$

Доказательство. Установим оценку сверху в (37) при $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_p. По заданному достаточно большому $m \in \mathbb{N}$ подберем число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^{nd} \le m < 2^{(n+1)d}$ и рассмотрим для $f \in H^r_p$ приближающий полином вида

$$t_n(f,x) = \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f,x).$$

Заметим, что, как отмечалось выше, оператор G, сопоставляющий функции $f(x)$ полином такого вида, принадлежит $L_m(1)_2 (\deg t_n = (2^{n+1}-1)^d)$.

Поскольку для $f \in H^r_p$, $p = 1, \infty$, выполнено соотношение $\big\|\sigma_s(f,x)\big\|_p \le 2^{-sr}$, используя неравенство Минковского, имеем

$$\|f(x) - t_n(f,x)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \sigma_s(f,x) \right\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f,x)\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr}.$$

Отсюда получаем

$$d^B_m(B^r_{p,\theta}, L_p) \le d^B_m(H^r_p, L_p) \le \sup_{f \in H^r_p} \big\|f(x) - t_{n-1}(f,x)\big\|_p \ll m^{-r/d}.$$

Необходимая оценка снизу в (37) следует из соответствующей оценки величины $d^B_m(B^r_{\infty,1}, L_1)$, которая получена при доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

***Замечание* 4.** Порядок величин $d^\perp_m(B^r_{p,\theta}, L_p)$, $p = 1, \infty$, $1 \le \theta < \infty$, в случае $d \ge 2$, по-видимому, неизвестен.

Для классов H^r_p порядок величин $d^\perp_m(H^r_p, L_p)$, $p = 1, \infty$, для всех размерностей $d \ge 1$ установлен в [14]. Что касается классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, в одномерном случае ($d = 1$), то в работе [15] получено соотношение

$$d^\perp_m(B^r_{1,\theta}, L_1) \asymp m^{-r}, \quad r > 0, \quad 1 \le \theta < \infty.$$

В завершение работы приведем сравнение полученных оценок ортопроекционных поперечников $d^\perp_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ с оценками аппроксимационных характеристик классов $B^r_{p,\theta}$, которые исследованы в [17].

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, содержащее m элементов, т. е. $|\Lambda| = m$. Для $f \in L_q(T^d)$, $1 \le q \le \infty$, обозначим

$$S_\Lambda(f,x) = \sum_{k \in \Lambda} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

и рассмотрим величину

$$e^\perp_m(f)_q = \inf_{\Lambda} \big\|f(x) - S_\Lambda(f,x)\big\|_q.$$

Для функционального класса $F \subset L_q(T^d)$ полагаем

$$e^\perp_m(F)_q = \sup_{f \in F} e^\perp_m(f)_q.$$

Величину $e_m^{\perp}(F)_q$ называют наилучшим ортогональным тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q.

Таким образом, сопоставляя теоремы 2, 3 с оценкой величины $e_m^{\perp}\left(B^r_{p,\theta}\right)_q$ [17] (теорема 1), находим, что при $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $(p,q) \neq (1,1)$ и $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$ справедливо соотношение

$$d_M^{\perp}(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r/d+(1/p-1/q)_+}.$$

1. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Там же. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
4. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
5. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
6. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
7. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. and Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
9. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 314 – 317.
10. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
11. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
12. *Галеев Э. М.* Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 3. – С. 32 – 41.
13. *Галеев Э. М.* Порядок ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Там же. – 1988. – **43**, № 2. – С. 197 – 202.
14. *Андрианов А. В., Темляков В. Н.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 32 – 43.
15. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 2. – С. 93 – 114.
16. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
17. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 513 – 523.

Получено 10.04.09