УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЗНАЧЕНИИ УСЛОВИЯ РАСХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

The paper is devoted to the investigations of space mapping theory. For one generalization of quasiregular mappings having a great significance in studying the Sobolev classes of mappings and other known classes of mappings, a simple condition is constructed that is satisfied by the all mappings of indicated kind and only by them. On the basis of conditions of integral-divergence type, sufficient conditions of the normality of families for the considered classes of mappings are obtained and a problem of removal of isolated singularities is solved. Some applications related to the investigation of mappings of the Sobolev class are given.

Роботу присвячено дослідженням у області просторових відображень. Для одного узагальнення квазірегулярних відображень, що має важливе значення при вивченні класів Соболєва та інших відомих класів відображень, побудовано просту умову, яку задовольняють усі відображення вказаного виду, і лише вони. На підставі умов типу інтегральної розбіжності отримано достатні умови щодо нормальності сімей для таких класів, а також розв'язано задачу про усунення ізольованих сингулярностей. Наведено застосування, що відносяться до дослідження відображень класу Соболєва.

1. Введение. Важное значение в геометрической теории функций имеют так называемые *модули семейств кривых* (см., например, [1]), которые являются вещественнозначными характеристиками искажения семейств кривых при отображении и играют роль внешней меры на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. С помощью модуля могут быть определены различные классы пространственных отображений, такие как *конформные* и *квазиконформные* отображения, *отображения с ограниченным, конечным искажением* и т. д. На основании тех же модульных соотношений, которым удовлетворяют указанные выше классы, могут решаться некоторые важные задачи, в частности проблема о нормальности семейств пространственных отображений, устранение особенностей (наличие предела в точке) и др. В данной работе значительное место занимает некоторый класс отображений, включающий в себя многие из типов отображений, изучавшихся ранее, и определяющийся некоторым соотношением с помощью упомянутых выше модулей. Решаемые нами задачи позволяют еще раз сделать заключение о важности метода модулей в геометрической теории функций. В последнем пункте указаны приложения полученных результатов к классам Соболева, что также, по мнению автора, немаловажно.

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, а также отображений с ограниченным искажением, заданных в области D из $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная (см., например, [1–3]). Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз. На языке емкостей соотношение (1) означает, что отображение f искажает емкость любого конденсатора в D не более чем в K раз. Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma)\le\int\limits_{D}Q(x)\rho^n(x)\,dm(x)\,, \tag{2}$$

где $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ (см. (3)), а $Q\colon D\to[1,\infty]$ — вещественнозначная функция (см., например, [4]). Идея изучения соотношения (2) первоначально принадлежит В. Я. Гутлянскому [5], который изучал подобное неравенство для специального класса отображений. Следует отметить также монографию В. М. Миклюкова [6], изучавшего подобные классы на поверхностях, а также работу Ю. Ф. Стругова [7], касающуюся изучения модульных оценок для гомеоморфизмов $f\in ACL^n$, $f^{-1}\in ACL^n$. В. И. Рязанов [8] предложил изучать *отображения с конечным искажением длины* и показал (совместно с О. Мартио, У. Сребро и Э. Якубовым), что отображения этого класса удовлетворяют оценке (2) с $Q(x)=K_I(x,f)$, где $K_I(x,f)$ — так называемая *внутренняя дилатация* f. Можно привести и другие примеры, подтверждающие, что для многих известных классов отображений имеют место оценки вида (2), в частности это касается отображений с конечным искажением [9]. Более того, соотношение (2) примечательно тем, что оно характеризует довольно широкое подмножество отображений класса Соболева (см. последний пункт). Заметим, что в этом пункте мы прибегаем лишь к интуиции читателя, не приводя строгих определений. В случае, когда в (2) $Q(x)\le K$ почти всюду, мы снова приходим к неравенству (1), при этом гомеоморфизмы, удовлетворяющие соотношению (2) при $Q(x)\equiv 1$, являются конформными отображениями, и наоборот, каждое конформное отображение удовлетворяет соотношению (2) с $Q(x)\equiv 1$ (см. [1]). В дальнейшем будем рассматривать случай, вообще говоря, неограниченных Q и речь будет идти о классах пространственных отображений, которые не будут совпадать с классом конформных (квазиконформных) отображений. Более общо, можно предполагать, что в (2) контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а только „некоторые”, и преимущественно мы рассматриваем в данной работе семейства кривых, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области, чего вполне достаточно для наших исследований.

Многие известные математики, которых можно было бы назвать крупными специалистами в геометрической теории функций, рассматривали условия типа расходимости интеграла $\displaystyle\int\frac{dr}{rK(r)}$, где $K(r)$ — некоторая функция, в связи с решением самых разнообразных задач (см., например, теорему 2 в [10], где исследовалась задача о существовании предела в точке, теорему в [11], где исследовалась задача о глобальном гомеоморфизме пространства, и [12] в связи с существованием решения уравнения типа Бельтрами). Данная работа также связана с условиями расходимости интегралов такого типа, причем эти условия мы рассматриваем для упомянутых выше классов, которые обобщают отображения с ограниченным искажением.

Круг проблем, исследуемых в статье, следующий: 1. Указать критерий, когда открытое дискретное отображение удовлетворяет соотношению вида (2), но без использования „допустимых” функций ρ в определении. Подобный критерий является, по мнению автора, очень полезным, так как, вообще говоря, соотношение (2) нужно проверять для бесконечного числа таких функций; решение данной проблемы было опубликовано в [13] (см. теорему 2.1), но только для гомеоморфизмов. В данной же статье рассматриваются просто открытые дискретные отображения (возможно наличие точек ветвления). 2. Продемонстрировать эффективность условия расходимости некоторого интеграла для решения различных проблем по отношению к классам отображений, удовлетворяющих оценке (2). В данной статье мы исследуем две такие проблемы — нахождение условий, связанных с существованием предела отображения в точке, и нахождение условий, при которых имеет место нормальность семейств отображений, удовлетворяющих (2) всюду в фиксированной области. 3. Указать приложения полученных результатов к классам Соболева.

2. Определения и предварительные замечания. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно, $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ — компактное подмножество области D. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что f *сохраняет ориентацию*, если топологический индекс $\mu(y, f, G) > 0$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Для $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е. $N(y, f, E) = \operatorname{card}\{x \in E\colon f(x) = y\}$. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение и существует область $G \Subset D$ такая, что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. Приведенные выше понятия открытости, дискретности, нульмерности, сохранения ориентации и т. п. естественным образом распространяются на отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\}$, $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < 1\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\}$, $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geq 1 \tag{3}$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x)\, dm(x).$$

Пусть E, $F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$,

$\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в [1]). Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности (см. [14]). Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to$ $\to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $S_i = S(x_0, r_i)$. Говорят, что $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M\big(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, A\right)\right)\big) \leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n\big(|x - x_0|\big)\, dm(x) \tag{4}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1. \tag{5}$$

Отметим, что соотношение (5) обобщает понятие допустимости (3). Отображение f будем называть *кольцевым Q-отображением в* D, если оно является таковым в любой точке области D.

Изучение кольцевых Q-отображений не только связано с обширным применением к различным классам отображений, в частности классам Соболева (см. последний пункт статьи), но и имеет самостоятельное значение, поскольку соотношениям вида (4) удовлетворяют решения уравнения типа *Бельтрами*, имеющего важные применения в науке и технике (см., например, [15, 16]). Если f — гомеоморфизм и $Q(x) \equiv c \in [1, \infty)$, определение кольцевого *Q-гомеоморфизма* дает определение квазиконформных отображений [14], так как в этом случае Q выносится из-под знака интеграла в (4) и в правой части (4) возникает модуль. По аналогии будем говорить, что отображение $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если выполнено соотношение (4). Смысл в том, что в самой точке x_0 отображение f может, вообще говоря, не быть определено. Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha\colon [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$; 3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3 гл. II в [2]). *Конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A (см., например, разд. 10 гл. II в [2]). *Емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость* (пишут $\operatorname{cap} C = 0$), если существует ограниченное открытое множество A такое, что $C \subset A$, $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Известно, что (см., например, лемму 3.4 гл. II в [3]) в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C, будет выполнено $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. В противном случае полагаем $\operatorname{cap} C > 0$. Аналогично можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см., например, [2]). В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x, y) = \left|\pi(x) - \pi(y)\right|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \qquad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f\colon X \to X'$. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X.

Предложение 1. *Если (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно* (*теорема Арцела–Асколи*) (*см., например, теорему* 20.4 *в* [1]).

Предложение 2. *Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \operatorname{cap}(A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$* (*см. предложение* 10.2 *гл.* II *в* [2]).

Отметим, что заключение предложения 2 остается справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}^n}$ (см. замечание 10.8 гл. II в [2]).

Иначе говоря, для конденсатора $E = (A, C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C, лежат в A и в то же время целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A. В случае ограниченного множества A такие кривые обязаны „подходить” к границе A, однако не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться.

Предложение 3. *Предположим, что E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что $\operatorname{cap} E > 0$. Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что*

$$\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C\right) \geq \delta$$

где C — произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такой, что $h(C) \geq a$ (*см., например, лемму* 2.6 *гл.* III *в* [2].

3. Основная лемма и следствие из нее. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [17, с. 6]).

Лемма 1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$ и E — конденсатор вида $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Положим*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)}. \tag{6}$$

Тогда для конденсатора $fE = \left(fB(x_0, r_2), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$ выполнено

$$\operatorname{cap} fE \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что пара множеств $fE = \Big(fB(x_0, r_2),$ $f\Big(\overline{B(x_0, r_1)}\Big)\Big)$ действительно является конденсатором, ибо f открыто и непрерывно в D, следовательно, $f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)$ является компактным подмножеством $fB(x_0, r_2)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (7), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (7) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$. Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ почти всюду на (r_1, r_2). Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{A} Q(x) \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} I, \tag{8}$$

где $A = A(r_1, r_2, x_0)$.

Заметим, что функция $\eta_1(t) = \psi(t)/I$, $t \in (r_1, r_2)$, удовлетворяет соотношению вида (5), так как $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \eta(t)\, dt = 1$. Поэтому согласно соотношению (8) и определению кольцевого Q-отображения (см. (4)),

$$M\big(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, A\right)\right)\big) \leq \int\limits_{A} Q(x) {\eta_1}^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}, \tag{9}$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$.

Пусть Γ_E и Γ_{fE} — семейства кривых в смысле обозначений предложения 2. По этому предложению

$$\operatorname{cap} fE = \operatorname{cap}\left(fB\left(x_0, r_2\right), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right) = M\left(\Gamma_{fE}\right). \tag{10}$$

Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий Γ_{fE} с началом в $\overline{B\left(x_0, r_1\right)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Предположим противное, т. е. существует кривая $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$

семейства Γ_{fE}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a,c) \to \to B(x_0, r_2)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x_0, r_2)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в $B(x_0, r_2)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $fB(x_0, r_2)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE}$. Рассмотрим множество $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon x = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\}$, $t_k \in [a,c)$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = c$. Отметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a,c), t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0, r_2)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. теорему 3.6 гл. I в [18]) $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k, c)\right)} = \limsup\limits_{k\to\infty} \alpha\left([t_k, c)\right) = \liminf\limits_{k\to\infty} \alpha\left([t_k, c)\right) \neq \varnothing$ в силу монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha\left([t_k, c)\right)$ и, таким образом, G является связным согласно теореме 9.12 гл. I в [18]. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha\colon [a,c) \to B(x_0, r_2)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha\colon [a,c] \to K \subset B(x_0, r_2)$ и $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 гл. II в [2] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{fE} > f\Gamma^*$ и для достаточно малых $\delta > 0$ $\Gamma_E > \Gamma\left(S(x_0, r_2 - \delta), S(x_0, r_1), D\right)$. Следовательно, в силу соотношения (9)

$$M\left(\Gamma_{fE}\right) \le M\left(f\Gamma^*\right) \le M\left(f\Gamma_E\right) \le$$
$$\le M\left(f\left(\Gamma\left(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2 - \delta), A(r_1, r_2 - \delta, x_0)\right)\right)\right) \le$$
$$\le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2-\delta} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}. \tag{11}$$

Заметим, что согласно нашему предположению, $I \neq \infty$, функция $1/t \cdot q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)$ суммируема на (r_1, r_2) и по абсолютной непрерывности интеграла (см., например, [17]) $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2-\delta} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \to \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}$ при $\delta \to 0$. Тогда в силу (11)

$$M(\Gamma_{fE}) \le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}. \tag{12}$$

Объединяя (12) и (10), получаем соотношение (7).

Лемма 1 доказана.

Предложение 4. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Положим*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{Irq_{x_0}^{1/(n-1)}(r)}, \tag{13}$$

где I *— величина, определенная в* (6). *Тогда*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} = \int\limits_A Q(x)\eta_0^n(|x-x_0|)dm(x) \le \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x) \qquad (14)$$

для произвольной измеримой функции $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *и любой функции* $\eta\colon (r_1, r_2) \to \to [0,\infty]$ *такой, что* $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1$ (*см. лемму* 2.2 *в* [13]). *Иначе говоря, для кольцевых* Q*-отображений в точке* x_0 *неравенство* (7), *вообще говоря, не может быть улучшено.*

Из леммы 1 и предложения 4 получаем критерий принадлежности отображений классу открытых дискретных кольцевых типа Q.

Теорема 1. *Открытое дискретное отображение* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *является кольцевым* Q*-отображением в точке* $x_0 \in D$ *тогда и только тогда, когда для произвольных* $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *и произвольного конденсатора* $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$ *емкость конденсатора* $fE = \left(fB(x_0,r_2), f\left(\overline{B(x_0,r_1)}\right)\right)$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{cap} fE \le \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}},$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ *задается соотношением* (6).

4. О нормальности семейств пространственных отображений и устранении изолированных особенностей.

Предложение 5. *Пусть* D — *область в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — *компактное множество положительной емкости и* $\mathfrak{F}_Q$ — *семейство открытых дискретных кольцевых* Q*-отображений* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$. *Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)dm(x) = o\left(L^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \qquad (15)$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *где* $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ — *семейство измеримых* (*по Лебегу*) *неотрицательных на* $(0,\infty)$ *функций, таких, что*

$$0 < L(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_Q$ *равностепенно непрерывно в точке* x_0 (*см. лемму* 5.2 *в* [19]).

Здесь и ниже равностепенная непрерывность, нормальность и т. д. понимаются относительно сферической (хордальной) метрики h.

Теорема 2. *Пусть* $x_0 \in D$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — *компактное множество положительной емкости,* $\mathfrak{F}_Q$ — *семейство открытых дискретных кольцевых* Q*-отображений* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ *в точке* x_0. *Предположим, что найдется число* $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty. \qquad (16)$$

Тогда семейство $\mathfrak{F}_Q$ *равностепенно непрерывно в точке* x_0.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ положим

$$\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) = \begin{cases} 1/[tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)], & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0). \end{cases}$$

Имеем

$$L(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

поскольку, в противном случае, по теореме 1 $\operatorname{cap}\left(fB(x_0, \varepsilon_0), f\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right) = 0$ для некоторого ε, что противоречит предложению 3. В силу соотношения (16) можно также считать, что $L > 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим также, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)dm(x) = \omega_{n-1}L(\varepsilon, \varepsilon_0)$$

и $L(\varepsilon, \varepsilon_0) = o\left(L^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right)$ в силу (16). Нужное заключение следует из предложения 5.

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$. Предположим, что для каждой точки $x_0 \in D$ найдется число $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ такое, что*

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2 и предложения 1.

Предложение 6. *Пусть $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. Предположим, что существует $0 < \varepsilon_0 < 1$ такое, что при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) = o\left(L^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right), \tag{17}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная на $(0, \infty)$ функция, такая, что $\psi(t) > 0$ для почти всех t и

$$0 < L(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f\colon \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$. Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h (см. лемму 3.1 в [20]).

Теорема 3. *Пусть $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. Предположим, что существует $0 < \varepsilon_0 < 1$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение $f\colon \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$. Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h.

Доказательство опирается на предложение 6 и аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$ и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то $\operatorname{cap}\big(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(U \setminus \{x_0\})\big) = 0$ для любой окрестности U точки x_0.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только в том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0.

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т. е. существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A < \infty$. Тогда $|f(x)| \le |A| + 1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0. Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)| \le M$ для некоторого $M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(U \setminus \{x_0\})\right) > 0$ и заключение следует из теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Если $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(U \setminus \{x_0\})\right) > 0$ для некоторой окрестности U точки x_0, то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f\colon D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f\colon D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу теоремы 3. Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, либо сохраняют ориентацию, либо не сохраняют (см., например, разд. 4 гл. I в [2]). Пусть, для определенности, f сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D, а через $B_f(D')$ множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \cup \{x_0\}$. Если x_0 — точка локальной гомеоморфности отображения f, доказывать нечего. Пусть точка $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского $\dim B_f(D) = \dim f\,(B_f(D)) \le n-2$ (см., например, теорему 4.6 гл. I в [2]), где $\dim$ обозначает топологическую размерность множества [22]. Тогда

$$\dim f\,(B_f(D')) \le n-2, \tag{18}$$

так как $f\,(B_f(D')) = f\,(B_f(D)) \bigcup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f\,(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n-2$ (см. следствие 1 гл. III разд. 3 в [22]). Пусть G — область в D' с $G \Subset D'$ и $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (18) существует точка $y_0 \notin f\,(B_f\,(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y. В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$ (см. § 2 гл. I в [3]), имеем

$$\mu(y,f,G) = \mu(y_0,f,G) = \sum_{x \in G \cap f^{-1}(y_0)} i(x,f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D'. Наконец, для любого $y \in f(D')$, в силу дискретности отображения f в области D, множество $\left\{f^{-1}(y)\right\}$ не более чем счетно и потому $\dim\left\{f^{-1}(y)\right\} = 0$. Следовательно [21, с. 333], отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

Теорема 7 (аналог теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса). *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ такая, что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h\,(f(x),a) \ge \varepsilon_0 \quad \forall\, x \in U \setminus \{x_0\}$$

и по неравенству треугольника $d_0 = h\,(B(a,\varepsilon_0/2), f\,(U \setminus \{x_0\})) \ge \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(U \setminus \{x_0\})\right) > 0$. Отсюда по теореме 3 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0, что противоречит первоначальному предположению.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Если x_0 — существенно особая точка отображения f, то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ емкости нуль такое, что

$$N\left(y, f, U \setminus \{x_0\}\right) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \tag{19}$$

По теореме 4 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (19) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость нуль (см., например, [23, с. 126]). Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \tag{20}$$

Из (20) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_{k_i} \to$ $\to 0$ при $i \to \infty$ и $f(x_{k_i}) = y$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 8 доказана.

Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f в предложении 6 и теоремах 3 – 8 является существенным, т. е. его, вообще говоря, нельзя отбросить.

Теорема 9. *При каждом $n \geq 2$ найдется дискретное Q-отображение $g\colon \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $Q \equiv 1$, $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теорем* 4, 7, 8.

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ кубами

$$C_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} \left[2k_i - 1, 2k_i + 1\right], \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим произвольный куб $C_{k_1,\ldots,k_n}$ с $k_1, \ldots, k_n \geq 0$ (случай k_i разных знаков может быть рассмотрен аналогично). Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C_{k_1,\ldots,k_n}$. Если $k_1 = 0$, то $g_{m_1}(x) := x$. Пусть $k_1 > 0$. Положим $f_{1,\ldots,1,1}(x) = y_{1,\ldots,1}$, где $y_{1,\ldots,1,1}$ — симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 1$. Если $2k_1 - 3 = -1$, процесс завершен. Пусть $2k_1 - 3 > -1$, тогда $f_{1,\ldots,1,2}(y_{1,\ldots,1}) = y_{1,\ldots,1,2}$, где $y_{1,\ldots,1,2}$ — симметрическое отражение точки $y_{1,\ldots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 3$. Если $2k_1 - 5 = -1$, процесс завершен. Если нет, продолжаем процесс: $f_{1,\ldots,1,3}(y_{1,\ldots,1,2}) = y_{1,\ldots,1,3}$. И так далее. За конечное число шагов m_1 находим функцию $g_{m_1} = f_{1,\ldots,1,m_1} \circ \ldots \circ f_{1,\ldots,1,1}$ такую, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе $C_{0,k_2,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем $x_{m_1} := g_{m_1}(x)$.

Далее, если $k_2 = 0$, то $g_{m_2}(x_{m_1}) = g_{m_1}(x_{m_1})$. При $k_2 > 0$ относительно точки x_{m_1} выполняем ту же операцию, но относительно координаты x_2. Полагаем $f_{1,\ldots,1,2,m_1}(x_{m_1}) = y_{1,\ldots,1,2,m_1}$, где $y_{1,\ldots,1,2,m_1}$ — симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2 = 2k_2 - 1$. Если $2k_2 - 3 = -1$, процесс завершен. Если нет, продолжаем до тех пор, пока не получим отображение

$g_{m_2}(x_{m_1}) = f_{1,\ldots,m_2,m_1} \circ \ldots \circ f_{1,\ldots,2,m_1}(x)$ такое, что $g_{m_2}(x_{m_1}) \in C_{0,0,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем $g_{m_1+m_2}(x) = g_{m_2} \circ g_{m_1}(x)$, $x_{m_2} := g_{m_1+m_2}(x)$. И так далее. Через некоторое число шагов $m_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ приходим к отображению $G_0(x) = g_{m_n} \circ g_{m_{n-1}} \circ \ldots g_{m_2} \circ g_{m_1}(x)$ такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0\ldots,0}$. Сжатие $G_1(x) = \dfrac{n}{\sqrt{n}}x$ переводит $C_{0,0,0\ldots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^n}$. Положим $G_2(x) := G_1(x) \circ G_0(x)$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения $G_2(x)$, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}^n}$. Тогда отображение

$$g(x) := G_2 \circ G_3(x), \tag{21}$$

где $G_3(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n}. \tag{22}$$

По построению отображения g, заданного соотношением (21), видно, что оно сохраняет модуль семейств кривых в $\mathbb{R}^n$, т. е. является 1-отображением в терминах соотношения (2), и, значит, в точке $x_0 = 0$ выполнено соотношение вида (16). Ясно также, что g — дискретное отображение. Заметим, что заключения теорем 4, 7, 8 не выполнены, в частности в силу (22) нарушена теорема типа Сохоцкого, ибо $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{\mathbb{B}^n}\right) > 0$. Причина в том, что g не является открытым отображением в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\}$.

Теорема 9 доказана.

Вопрос о том, можно ли опустить условие дискретности в формулировках перечисленных результатов, как минимум, открыт.

5. О приложениях к классам Соболева. В этом пункте мы (достаточно кратко) укажем приложения открытых дискретных Q-отображений к классам Соболева. Такая связь дает нам определенные основания считать всю вышеизложенную теорию Q-отображений вполне состоятельной и имеющей в известном смысле право на существование и свое место в геометрической теории функций.

Предложение 7. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, для которого $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ и $|B_f| = 0$. Тогда f является $K_I(x,f)$-отображением в смысле соотношения* (2).

Доказательство непосредственно следует из замечания 4.10 и теоремы 6.10 в [8].

Таким образом, все сформулированные в статье результаты автоматически могут быть перенесены на указанный класс Соболева.

1. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
2. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
3. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – **30**, № 1. – P. 49 – 69.
5. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.

6. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2005. – 273 с.
7. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
9. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
10. *Шабат Б. В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 5. – С. 1045 – 1048.
11. *Зорич В. А.* Допустимый порядок роста характеристики квазиконформности в теореме Лаврентьева // Там же. – 1968. – **181**, № 3. – С. 530 – 532.
12. *Lehto O.* Homeomorphisms with a prescribed dilatation // Lect. Notes Math. – 1968. – **118**. – P. 58 – 73.
13. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
14. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
15. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117 – 150.
16. *Bojarski B. V., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 3. – P. 305 – 326.
17. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
18. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
19. *Севостьянов Е. А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 583 – 604.
20. *Севостьянов Е. А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Там же. – 2008. – **5**, № 3. – С. 366 – 381.
21. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
22. *Titus C. J., Young G. S.* The extension of interiority with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 329 – 340.
23. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983.

Получено 26.12.07