УДК 519.21

**А. В. Королев** (Моск. ун-т им. М. В. Ломоносова, Россия)

# ОБ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ В ФОРМЕ КОЗЛОВА – ТРЕЩЕВА ДЛЯ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ*

We study nonuniform ergodic averagings of the Kozlov – Treshchev type for operator semigroups. We obtain estimates for the corresponding maximal functions.

Вивчаються нерівномірні ергодичні усереднення типу Козлова – Трещева для операторних півгруп. Отримано оцінки для відповідних максимальних функцій.

В работах [1, 2] начато рассмотрение неравномерных усреднений общего вида

$$F_t f(x) \;=\; \int_0^\infty f(T_{ts}x)\,\nu(ds)$$

для полупотоков $\{T_t\}$ с инвариантной мерой $\mu$. Для абсолютно непрерывных вероятностных мер $\nu$ на полуоси и ограниченных функций $f$ было доказано, что при $t \to +\infty$ величины $F_t f(x)$ при $\mu$-почти всех $x$ имеют тот же предел, что и в случае классического равномерного усреднения в теореме Биркгофа – Хинчина. Это исследование было продолжено в работе [3] (см. также [4], гл. 10), где было выяснено, что для неограниченных функций $f$ это утверждение теряет силу, однако при некоторых соотношениях между характерами интегрируемости $f$ и плотности меры $\nu$ имеются положительные результаты. В данной работе продолжается исследование средних $F_t f(x)$. В частности, оказывается, что для сходимости указанных средних в $L^p$ на окружности с мерой Лебега можно отказаться от абсолютной непрерывности меры $\nu$. Кроме того, некоторые результаты, полученные в [3], обобщаются на операторный случай, когда полугруппа действует в $L^1(\mu)$.

**Теорема 1.** *Пусть* $(X, \lambda)$ *— произведение* $n$ *окружностей с нормированной мерой Лебега, а* $\{T_{s,\ldots,s}\}$ *—* $n$*-параметрическая полугруппа сдвигов на* $X$, *т. е.* $T_{s,\ldots,s}\ \ x := (T_s x_1, \ldots, T_s x_n)$, *где* $T_s$ *— поворот* $i$*-й окружности на угол* $-s_i$. *Пусть* $\nu$ *— произвольная вероятностная мера на* $\mathbb{R}_+^n$, *имеющая преобразование Фурье* $\hat{\nu}$. *Равенство*

$$\lim_{\min(t,\ldots,t)\to+\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} f\Big(T_{ts,\ldots,ts}(x)\Big)\,\nu(d\,\overline{s}) - \int_X f(x)\,\lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} \;=\; 0 \tag{1}$$

*выполнено для любой функции* $f \in L^p(\lambda)$ *при* $p \in [1, +\infty]$ *в точности тогда, когда при* $\|\,\overline{t}\,\| \to +\infty$ *выполнено соотношение* $\hat{\nu}(\overline{t}\,) \to 0$.

***Доказательство.*** Предположим, что $\hat{\nu}(\overline{t}\,) \to 0$ при $\|\,\overline{t}\,\| \to +\infty$. Положим $T_{\overline{ts}} := T_{ts,\ldots,ts}$ при $t = (t_1, \ldots, t_n)$ и $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$. Тогда для любой функции $g \in C(X)$ для каждого $x \in X$ выполнено равенство

$$\lim_{\min(t,\ldots,t)\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g\Big(T_{\overline{ts}}(x)\Big)\,\nu(d\overline{s}) \;=\; \int_X g(x)\,\lambda(dx).$$

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07-01-00536, 08-01-90431-Укр.).

Из теоремы Лебега следует, что этот предел существует и в $L^p(\lambda)$. Пусть теперь $f \in L^p(\lambda)$. Возьмем последовательность непрерывных функций $g_k$ на $X$ таких, что $\| f - g_k \|_{L(\lambda)} \to 0$ при $k \to +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое $N > 0$, что при всех $k > N$ выполнено неравенство $\| f - g_k \|_{L(\lambda)} < \varepsilon$. Найдется $t_0 \geq 0$ такое, что указанная в (1) норма выражения для $g_k$ вместо $f$ будет меньше $\varepsilon$ при всех $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, для которых $t_i > t_0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для таких $k$, $\bar{t}$ имеем

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f\big(T_{\overline{ts}}(x)\big)\, \nu(d\bar{s}) - \int_X f(x)\, \lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} (f - g_k)\big(T_{\overline{ts}}(x)\big)\, \nu(d\bar{s}) \right\|_{L^p(\lambda)} +$$

$$+ \left\| \int_{\mathbb{R}} g_k\big(T_{\overline{ts}}(x)\big)\, \nu(d\bar{s}) - \int_X g_k(x)\, \lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} + \left\| \int_X \big(g_k(x) - f(x)\big)\lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} \leq 3\varepsilon,$$

так как

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} (f - g_k)\big(T_{\overline{ts}}(x)\big)\, \nu(d\bar{s}) \right\|_{L^p(\lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \int_X \left| (f - g_k)\big(T_{\overline{ts}}(x)\big) \right|^p \lambda(dx)\ \nu(d\bar{s}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_X | f(x) - g_k(x) |^p\, \lambda(dx)\ \nu(d\bar{s}) \leq \varepsilon.$$

Предположим теперь, что $\hat{\nu}(\bar{t})$ не стремится к $0$ при $\| \bar{t} \| \to +\infty$. Тогда для функции $f(x_1, \ldots, x_n) := \exp(ix_1 + \ldots + ix_n)$ имеем

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f\big(T_{\overline{ts}}(x)\big)\, \nu(d\bar{s}) - \int_X f(x)\, \lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} = | \hat{\nu}(\bar{t}) |^p,$$

но последнее выражение не стремится к $0$ при $\min(t_1, \ldots, t_n) \to +\infty$.

Теорема доказана.

Пусть $(X, \lambda)$ — единичная окружность с мерой Лебега, $T_t$ — поворот окружности на угол $-t$. Известно, что существует такая безатомическая сингулярная борелевская вероятностная мера $\nu$ на $[0, 1]$, что ее преобразование Фурье $\hat{\nu}$ стремится к нулю на бесконечности (см. [5, с. 35]). Тогда для любой функции $f \in L^p(\lambda)$ средние $F_t f(x)$ сходятся в $L^p(\lambda)$. Однако остается открытым вопрос о существовании сингулярных мер, для которых имеется сходимость средних почти всюду.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда $\{T_t\}$ — полугруппа положительных операторов на $L^1(\mu)$, где $\mu$ — вероятностная мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$. Случай классических равномерных усреднений был рассмотрен в [6, 7]. Пусть $\{T_t\}$ — сильно измеримая полугруппа. В статье [7] показано, что из условий $\| T_t \|_1 \leq 1$ и $\| T_t \|_\infty \leq 1$ следует неравенство

$$\int_0^\infty | T_s(f)(x) | \beta(s)\, ds \leq f^*(x) \int_0^\infty \beta(s)\, ds,$$

где

$$f^*(x) \ := \ \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t |T_s(f)(x)|\, ds$$

для любой функции $f \in L^p(\mu)$ и любой положительной и невозрастающей функции $\beta$ на $\mathbb{R}_+$.

***Замечание* 1.** Пусть $\nu = \rho\, ds$ — вероятностная мера на $[0, +\infty)$, причем существует такая невозрастающая функция $\beta \in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$, что $\rho \le \beta$ на $[0, +\infty)$. Тогда

$$\int_0^\infty |(T_{ts}f)(x)|\, \rho(s)\, ds \ \le \ f^*(x) \int_0^\infty \beta(s)\, ds\,.$$

Если $p > 1$, то существует постоянная $C$, не зависящая от $f$, такая, что

$$\left\| \sup_t \int_0^\infty |(T_s f)(x)|\, \beta(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)} \ \le \ C \| f \|_{L^p(\mu)}.$$

Чтобы проверить первое неравенство, достаточно выполнить замену $u \ := \ ts$. Второе неравенство непосредственно следует из теоремы об оценке нормы $f^*$ (см. [6, с. 735], теорема 7).

Следующее утверждение распространяет оценку, полученную в [6, с. 735] (теорема 7), на случай усреднений с плотностью.

**Теорема 2.** *Пусть* $T_t$ *— сильно измеримая полугруппа положительных операторов на* $L^1(\mu)$, *причем* $\| T_t \|_1 \le 1$ *и* $\| T_t \|_\infty \le 1$. *Пусть* $\rho \in L^q(\lambda)$, *где* $\lambda$ *— мера Лебега на* $\mathbb{R}_+$, $\rho \ge 0$ *и существует невозрастающая функция* $\beta \in$ $\in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ *такая, что для некоторого* $t_0 \ge 0$ *имеем* $\rho(s) \le \beta(s)$ *при* $s \in$ $\in [t_0, +\infty)$. *Тогда для любой функции* $f \in L^p(\mu)$, $p^{-1} + q^{-1} < 1, p, q \in (1, +\infty]$, *выполнено неравенство*

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}\big(f(x)\big)\, \rho(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)} \ \le \ C(p) \left( t_0^{q(q-1)} \| \rho \|_{L^q([0,t],\lambda)} + \| \beta \|_{L(\lambda)} \right) \| f \|_{L^p(\mu)},$$

*где* $C(p) := 2 \left( \dfrac{p}{p-1} \right)^{1/p}$.

***Доказательство.*** Случай $p = +\infty$ следует из неравенства $\| T \|_\infty \le 1$. Пусть $p < +\infty$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(p - \varepsilon)^{-1} + q^{-1} = 1$. Положим $\sigma :=$ $:= \rho I_{[0,t]}$ и $\tau := \rho I_{[t,+\infty)}$. Тогда выполнено неравенство

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}\big(f(x)\big)\, \rho(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)} \ \le \ \left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}\big(f(x)\big)\, \sigma(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)} +$$

$$+ \left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}\big(f(x)\big)\, \tau(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)}.$$

Сначала оценим первое слагаемое. По условию $\|T_t\|_1 \le 1$ и $\|T_t\|_\infty \le 1$, откуда при каждом $t$ имеем

$$|T_t f(x)|^{p-\varepsilon} \le T_t |f(x)|^{p-\varepsilon}$$

для $\mu$-почти всех $x$. Из теоремы Фубини следует, что для $\mu$-почти всех $x$ существуют такие множества $B_x \subset \mathbb{R}_+$, что $\lambda(\mathbb{R}_+ \setminus B_x) = 0$ и при $t \in B_x$ выполнено указанное неравенство. Получаем

$$\left| \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\sigma(s)\,ds \right| \le \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \left( \int_0^t |T_{ts} f(x)|^{p-\varepsilon}\,ds \right)^{(p-\varepsilon)^{-1}} \le$$

$$\le \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \left( \frac{1}{t} \int_0^t T_s |f|^{p-\varepsilon}(x)\,ds \right)^{(p-\varepsilon)^{-1}} \le$$

$$\le t_0^{q(q-1)} \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \left( \frac{1}{t_0 t} \int_0^t T_s |f|^{p-\varepsilon}(x)\,ds \right)^{(p-\varepsilon)^{-1}}$$

для $\mu$-почти всех $x \in X$, причем существование интегралов в правых частях неравенств следует из эргодической теоремы, примененной к последнему интегралу. Тогда

$$\left| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\sigma(s)\,ds \right| \le t_0^{q(q-1)} \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \left( \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t T_s |f|^{p-\varepsilon}(x)\,ds \right)^{(p-\varepsilon)}$$

для $\mu$-почти всех $x \in X$. Поскольку $f \in L^p(\mu)$, то $|f|^{p-\varepsilon} \in L^{p/(p-\varepsilon)}(\mu)$ и, согласно теореме 7 [6, с. 735], выполнено неравенство

$$\left\| \left( \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t T_s |f|^{(p-\varepsilon)}(x)\,ds \right)^{(p-\varepsilon)^{-1}} \right\|_{L^p(\mu)} \le C(p) \left\| |f|^{(p-\varepsilon)} \right\|_{L^{p/(p-\varepsilon)}(\mu)}^{(p-\varepsilon)^{-1}} = C(p) \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Применяя последнее неравенство к оценкам, полученным выше, окончательно получаем

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\sigma(s)\,ds \right\|_{L^p(\mu)} \le$$

$$\le t_0^{q(q-1)} \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \left\| \left( \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t T_s |f|^{p-\varepsilon}(x)\,ds \right)^{(p-\varepsilon)^{-1}} \right\|_{L^p(\mu)} \le$$

$$\le t_0^{q(q-1)} C(p) \|\sigma\|_{L^q(\lambda)} \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Теперь оценим интеграл с плотностью $\tau$. Можно считать, что $\beta \ge 0$. Имеем

$$\left| \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\tau(s)\,ds \right| \le \int_0^{+\infty} T_{ts} |f(x)|\,\beta(s)\,ds \le$$

$$\leq \;\|\beta\|_{L^1(\mu)} \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t T_s |f|(x)\,ds$$

для $\mu$-почти всех $x \in X$, что следует из замечания 1. Снова применяя теорему из [6, с. 735], находим

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\tau(s)\,ds \right\|_{L^p(\mu)} \leq \; C(p)\|\beta\|_{L^1(\lambda)} \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Окончательно

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}\big(f(x)\big)\rho(s)\,ds \right\|_{L^p(\mu)} \leq \; C(p)\|f\|_{L^p(\mu)} \left( t_0^{q(q-1)} \|\rho\|_{L^q([0,t],\lambda)} + \|\beta\|_{L^1(\lambda)} \right).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим сходимость средних $F_t$ для операторного случая.

**Теорема 3.** *Пусть $T_t$ — сильно измеримая полугруппа положительных операторов на $L^1(\mu)$, причем $\|T\|_1 \leq 1$ и $\|T\|_\infty \leq 1$. Пусть $f \in L^p(\mu)$ и $\rho \in L^q(\lambda)$ — вероятностная плотность, где $\lambda$ — мера Лебега на $\mathbb{R}_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p,\, q \in [1, +\infty]$. Предположим, что выполнено одно из условий*:

i) *плотность $\rho$ имеет ограниченный носитель в отрезке $[a, b]$*;

ii) *$p > 1$ и существует невозрастающая функция $\beta$ на $[0, +\infty)$, для которой $\beta \geq 0$, $\beta \in L^q[0, +\infty)$ и $\rho(t) \leq \beta(t)$ на $[t_0, \infty)$ для некоторого $t_0$.*

*Тогда для $\mu$-почти всех $x \in X$ выполнено равенство*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\,\rho(s)\,ds \;=\; \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x), \tag{2}$$

*где $\mathbb{E}^{\mathcal{T}} f$ — условное математическое ожидание $f$ относительно $\mathcal{T}$ — $\sigma$-алгебры $T_t$-инвариантных множеств.*

***Доказательство.*** Можно считать, что $f \geq 0$. Пусть носитель $\rho$ лежит в $[a, b]$. Положим $f_N = \min(f, N)$, $g_N = f - f_N$. Для ограниченных функций $f_N$ доказываемое утверждение верно, поэтому для $\mu$-почти всех $x$ при всех $N$ справедливо равенство (2) для $f_N$ вместо $f$. Пусть $t \geq 0$ и $h_{t,x,N}(s) = T_{ts}\big(g_N(x)\big)$. По неравенству Гельдера

$$\int_a^b T_{ts}\big(g_N(x)\big)\rho(s)\,ds \;\leq\; \|h_{t,x,N}\|_{L^p(\lambda)} \|\rho\|_{L^q(\lambda)}.$$

В силу $\mu$-интегрируемости функции $x \mapsto T_{ts}\big(|g_N(x)|^p\big)$ из эргодической теоремы следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b T_{ts}\big(|g_N(x)|^p\big)\,ds \;=\; (b-a)\,\mathbb{E}^{\mathcal{T}} |g_N(x)|^p$$

для $\mu$-почти всех $x$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Поскольку $\mu$-почти всюду выполнено равенство $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{T}} |g_N(x)|^p = 0$, существуют $N_0$ и $E \in \mathcal{A}$ с $\mu(E) > 1 - \varepsilon$ такие, что при $N > N_0$ справедлива оценка

$$(b-a)\,\mathbb{E}^{\mathcal{T}} |g_N(x)|^p < \varepsilon, \quad x \in E.$$

Для $\mu$-почти любого $x \in E$ существует такое число $T(x, \varepsilon)$, что при всех $t \geq T(x, \varepsilon)$ и $N > N_0$ выполнены неравенства

$$\int_a^b T_{ts}\left(|g_N(x)|^p\right) ds \leq \varepsilon,$$

$$\left| \int_a^b T_{ts}(f_N(x))\,\rho(s)\,ds - \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f_N(x) \right| < \varepsilon.$$

Из неравенств $\|T_t\|_1 \leq 1$ и $\|T_t\|_\infty \leq 1$ следует, что для $\mu$-почти всех $x \in X$ при всех $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\int_a^b |T_{ts} f(x)|^p\, ds \leq \int_a^b T_{ts} |f(x)|^p\, ds.$$

Тогда для $\mu$-почти всех $x \in E$ при $t \geq T(x, \varepsilon)$ и $N > N_0$ имеем

$$\int_a^b T_{ts}(g_N(x))\,\rho(s)\,ds \leq \varepsilon \|\rho\|_{L^q(\lambda)}.$$

Окончательно получаем

$$\left| \int_a^b T_{ts}(f(x))\,\rho(s)\,ds - \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x) \right| < 2\varepsilon + \varepsilon \|\rho\|_{L^q(\lambda)}.$$

Теперь достаточно рассмотреть случай, когда $\rho$ — ограниченная функция и $p > 1$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Осталось применить предыдущую теорему и воспользоваться тем, что доказываемое равенство выполнено для всех ограниченных интегрируемых функций $f$.


1. *Kozlov V. V., Treshchev D. V.* On new forms of the ergodic theorem // J. Dynam. Control Syst. – 2003. – **9**, № 3. – P. 449 – 453.
2. *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Эволюция мер в фазовом пространстве нелинейных гамильтоновых систем // Теор. и мат. физика. – 2003. – **136**, № 3. – С. 496 – 506.
3. *Богачев В. И., Королев А. В.* Об эргодической теореме в форме Козлова – Трещева // Докл. РАН. – 2007. – **412**, № 3. – С. 295 – 301.
5. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. I. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Dunford N., Schwartz J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages // J. Ration. Mech. and Anal. – 1956. – № 1. – P. 129 – 178.


Получено 30.11.09