УДК 512.58, 515.124

В. В. Некрашевич (Техас. A&M ун-т, США),
А. С. Олийнык (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
В. И. Сущанский (Силез. техн. ун-т, Польша)

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТИЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

We characterize natural categories in which morphisms are defined by partial automata of the following three types: the asynchronous automata, the window automata, and the automata synchronous over finite alphabets. We distinguish subcategories whose morphisms are defined by finite automata.

Охарактеризовано природні категорії, морфізми в яких визначаються частковими автоматами трьох типів: асинхронними, віконними і синхронними над скінченними алфавітами. Виділено підкатегорії, морфізми яких визначені скінченними автоматами.

1. Введение. Автоматы-преобразователи различных типов оказались удобным средством для задания отображений ультраметрических пространств, гомеоморфных канторовскому дисконтинууму. Уже сравнительно небольшие по числу состояний автоматы могут определять отображения с интересными свойствами, что удобно при построении различных примеров [1]. Такие автоматы можно использовать для построения и анализа динамических систем, определенных на вполне несвязных компактах (см., например, [2, 3]), и динамических систем с дискретным временем [4]. Кроме того, автоматные преобразования (случай, когда входной и выходной алфавиты совпадают) относительно операции суперпозиции образуют полугруппу, которая содержит много групп и полугрупп с различными экстремальными свойствами, применяющихся в различных разделах современной алгебры, символьной динамики, теории C^*-алгебр (см. [5, 6]).

Анализ категорий отображений, определенных основными типами автоматов-преобразователей, до настоящего времени не проводился, хотя из обзора [5] и работы [7] следует, что возникающие здесь категории тесно связаны с категорией, объектами которой являются ультраметрические пространства, а морфизмами — их непрерывные отображения. В настоящей работе мы попытаемся восполнить указанный пробел. Будем рассматривать три типа автоматов-преобразователей: асинхронные, оконные и синхронные, которым соответствуют три типа отображений ультраметрических пространств — непрерывные, липшицевые и неувеличивающие расстояние.

Каждый частичный асинхронный автомат (т. е. автомат, функции переходов и выходов которого могут быть не везде определены) имеет вполне заданные область определения и область значений, которые являются замкнутыми подмножествами в пространствах бесконечных слов, преобразовываемых этим автоматом. Поэтому категория, определяемая автоматами, строится следующим образом: ее объектами являются замкнутые подмножества бесконечных слов над различными конечными алфавитами, а морфизмами — определяемые автоматами отображения. Характеризация этой категории и ее подкатегорий, соответствующих оконным и синхронным автоматам, и является основной целью данной работы. Опишем кратко ее строение.

В п. 2 приведены сведения, необходимые для работы с автоматными преобразованиями: метрическое пространство ω-слов, асинхронные, оконные и синхронные автоматы, автоматные отображения, равносильные автоматы, операция суперпозиции автоматов и отображений, ими определяемых. В п. 3 сформулированы основные утверждения о свойствах автоматных отображений (теоремы 1, 2), конечноавтоматных отображений (теоремы 4, 5), а также представлена характеризация категорий автоматных отображений в топологических терминах (теорема 3). В п. 4 приведены доказательства указанных теорем и обсуждаются границы их применимости.

Все обозначения в работе общепринятые. Определения неопределяемых в статье понятий теории автоматов см. в [8].

2. Пространство ω-слов. Действие автоматов на ω-словах. ***2.1.*** Пусть X — конечный алфавит, $|\mathrm{X}| = n$, X^* — множество слов над алфавитом X (включая пустое слово $\varnothing$). Длину слова $u \in \mathrm{X}^*$ (число составляющих слово букв) будем обозначать символом $|u|$. Как обычно, конкатенацией слов $u = x_1 x_2 \ldots x_k$, $v = y_1 y_2 \ldots y_k \in \mathrm{X}^*$ называется слово $uv = x_1 x_2 \ldots x_k y_1 y_2 \ldots \ldots y_l$. Слово u называется подсловом слова v, если существуют слова w_1, w_2 такие, что $v = w_1 u w_2$. Если при этом $w_1 = \varnothing$, то слово u называется префиксом или началом слова v, а если $w_2 = \varnothing$, то говорим, что u — окончание слова v. Символом X^m будем обозначать множество всех слов длины m (в частности, $\mathrm{X}^0 = \{\varnothing\}$). Таким образом,

$$\mathrm{X}^* = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathrm{X}^m .$$

Бесконечными (вправо) словами или, кратко, ω-словами над алфавитом X будем называть бесконечные последовательности символов алфавита X; ω-слова можно строить в виде конкатенации бесконечного числа конечных слов. Конкатенация

$$\prod_{i=1}^{\infty} w_i = w_1 w_2 w_3 \ldots$$

будет бесконечным словом в том и только в том случае, когда число непустых множителей w_i, $i \in \mathbb{N}$, бесконечно. Множество всех ω-слов над алфавитом X обозначим через X^ω. Для ω-слов определяются также понятия префикса и окончания. А именно, слово $u \in \mathrm{X}^*$ будет префиксом ω-слова v, если существует такое ω-слово w, что имеет место равенство $v = uw$; ω-слово w в этом случае называется окончанием слова v.

Положим $\mathrm{X}^\infty = \mathrm{X}^* \bigcup \mathrm{X}^\omega$. Для любых $u, v \in \mathrm{X}^\infty$ символом $\kappa(u, v)$ обозначим длину общего начала u, v. Определим функцию

$$d : X^\infty \times X^\infty \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\},$$

положив для любой пары $(u, v) \in X^\infty \times X^\infty$

$$d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u = v, \\ 2^{-\kappa(u, v)}, & \text{если } u \neq v. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что d является ультраметрикой на множестве X^∞.

Для любых подмножеств $K \subset \mathrm{X}^*$, $L \subset \mathrm{X}^\omega$ символом KL обозначим множество $\{uv \mid u \in K, v \in L\}$. Каждый шар в пространстве X^ω имеет вид $D_u =$

$= \{u\} X^{\omega}$ для некоторого слова $u \in X^*$. Отсюда непосредственно следует такая лемма.

Лемма 1. *Любое открытое подмножество в пространстве* X^{ω} *совпадает с множеством вида* LX^{ω} *при некотором* $L \subset X^{\omega}$.

Замыкания подмножеств из X^{ω} могут быть охарактеризованы следующим образом.

Лемма 2. *Пусть* $A \subset X^{\omega}$ *— некоторое подмножество.* ω*-Слово* $w \subset X^{\omega}$ *принадлежит замыканию* $\bar{A}$ *множества* A *в том и только в том случае, когда каждый префикс* ω*-слова* w *является префиксом некоторого слова из* A.

Доказывается лемма непосредственной проверкой.

Отсюда для подпространства X^{ω} получаем такую лемму.

Лемма 3. *Подпространство* X^{ω} *метрического пространства* (X^{∞}, d) *является однородным вполне несвязным полным компактом диаметра* 1.

2.2. Будем рассматривать функции, определяемые частичными автоматами одного из трех типов:

1) асинхронными;
2) оконными (иначе, одномерными клеточными);
3) синхронными (иначе, автоматами Мили).

Каждый автомат типа 1 – 3 задается пятеркой данных вида

$$A = \langle X, Y, Q, \varphi, \psi \rangle,$$

где X — входной, а Y — выходной алфавиты автомата A, $|X|, |Y| < \infty$; Q — множество внутренних состояний A; φ — вообще говоря, частично определенная функция из $Q \times X$ в Q, называемая функцией переходов A.

Функция ψ, которая называется функцией выходов, в каждом из случаем 1 – 3 определяется по-разному. А именно, ψ является, вообще говоря, частичной функцией

i) из множества $Q \times X$ в множество Y^* слов над выходным алфавитом Y в случае, когда A — асинхронный автомат;

ii) из множества $Q \times X^n$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксировано и зависит только от автомата A) в Y для оконных автоматов;

iii) из множества $Q \times X$ в множество Y для синхронных автоматов.

Удобным способом описания (асинхронных автоматов) являются специального вида графы, называемые *диаграммами Мура*. Множество вершин диаграммы Мура автомата A совпадает с множеством его состояний. Вершины q_1, q_2 соединены стрелкой в направлении от q_1 к q_2, если существует буква $x \in X$ такая, что $\varphi(q_1, x) = q_2$. Данная стрелка снабжается меткой $(x, \psi(q_1, x))$.

Далее, символом $\mathrm{Dom}\, f$ будем обозначать область определения функции f, а символом $\mathrm{Im}\, f$ — ее область значений. Если A — оконный автомат и $\mathrm{Dom}\, \psi \subset Q \times X^n$, то число n называется шириной окна автомата A. Автомат $A = \langle X, Y, Q, \varphi, \psi \rangle$ называется всюду определенным, если функции φ, ψ везде определены; в противном случае говорят, что A — частичный автомат. Автомат A называется конечным, если конечным является множество его внутренних состояний; в противном случае говорят, что A — бесконечный автомат.

Каждый из автоматов типа 1 – 3 перерабатывает цепочки входных символов (над алфавитом X) в цепочки выходных символов (над алфавитом Y), начиная работу в некотором состоянии q_0. За один такт работы он обрабатывает один входной символ (автоматы типов 1 и 3) или входное слово длины n (автоматы типа 2), изменяет внутреннее состояние и выдает на выходе либо один символ (автоматы типов 2 и 3), либо некоторое, возможно пустое, слово (автоматы типа 1). В процессе работы асинхронный автомат перерабатывает входное слово или ω-слово побуквенно, в каждом такте выдавая на выходе некоторое слово в выходном алфавите; при этом всему входному слову или ω-слову сопоставляется конкатенация так полученных выходных слов. Поскольку выходное слово, построенное за один такт работы асинхронного автомата, может быть пустым, ω-слова могут перерабатываться асинхронными автоматами в слова конечной длины. Синхронный автомат перерабатывает слова, сопоставляя каждому входному символу один выходной. Поэтому такие автоматы перерабатывают слова, не изменяя их длины, а образами ω-слов всегда будут ω-слова. Оконный автомат, находясь в некотором внутреннем состоянии, просматривает сразу n-буквенное слово на входе и сопоставляет ему некоторый символ выходного алфавита; потом он сдвигается на один символ вправо, просматривает новые n символов и т. д. В результате входное слово длины $m \geq n$ он перерабатывает в выходное слово длины $m - n$, а входное ω-слово — в выходное ω-слово.

2.3. Формальное определение действия автоматов на слова и ω-слова следующее. Сначала функция переходов и функция выходов автомата A распространяются на множество $Q \times \mathrm{X}^*$. Для синхронных и асинхронных автоматов это осуществляется с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\varphi(q, \varnothing) = q, \qquad \varphi(q, ux) = \varphi(\varphi(q, u), x), \tag{1}$$

$$\psi(q, \varnothing) = \varnothing, \qquad \psi(q, ux) = \psi(\varphi(q, u), x), \tag{2}$$

где $u \in \mathrm{X}^*$, $x \in \mathrm{X}$. При этом если значение функций φ и ψ на каком-то начале слова не определено, то оно не определено и для всего слова. В результате получаем функции, определенные на некоторых подмножествах множества $Q \times \mathrm{X}^*$. Для оконных автоматов функция переходов φ распространяется на некоторое подмножество множества $Q \times \mathrm{X}^*$ согласно соотношениям (1), а значения функции выходов ψ определяются, в зависимости от ширины n окна автомата, равенствами

$$\psi(q, u) = \varnothing, \quad \text{если} \quad |u| < n; \; \varphi(q, uu_1) = \psi(\varphi(q, u), u_1), \tag{3}$$

где $u, u_1 \in \mathrm{X}^*$ и $|u_1| = n$. Теперь образ слова или ω-слова $u = x_1x_2x_3 \ldots$ над алфавитом X при действии на него автоматом A, находящимся в состоянии q_0, определяется как слово или ω-слово $u' = y_1y_2y_3 \ldots$ над алфавитом Y такое, что для каждого натурального i

$$y_i = \psi(q_0, x_1x_2 \ldots x_i) \tag{4}$$

в случае синхронного или асинхронного автомата и

$$y_i = \psi(q_0, x_1x_2 \ldots x_{i+n-1}) \tag{5}$$

в случае оконного автомата с шириной окна n. Образ слова u не определен, если хотя бы одна из функций φ, ψ не определена на одном из префиксов слова u. Тем самым каждый частичный автомат A одного из описанных типов, находясь в начальном состоянии q_0, определяет две функции f_{A,q_0} и $\widehat{f_{A,q_0}}$ такие, что $\mathrm{Dom}\, f_{A,q_0} \subset X^\omega$, $\mathrm{Im}\, f_{A,q_0} \subset Y^\omega$ и $\mathrm{Dom}\, \widehat{f_{A,q_0}} \subset X^*$, $\mathrm{Im}\, \widehat{f_{A,q_0}} \subset \subset Y^*$.

Определение 1. *Частичную функцию* f_{A,q_0} (*соответственно* $\widehat{f_{A,q_0}}$) *будем называть функцией, задаваемой автоматом* A *в состоянии* q_0 *на множестве* ω-*слов* X^ω (*соответственно на множестве слов* X^*).

Это определение позволяет ввести в рассмотрение класс автоматных функций над данным алфавитом.

Определение 2. *Функцию* $f\colon D \to Y^\omega$, $D \subset X^\omega$, *или* $\hat{f} : \hat{D} \to Y^*$, $\hat{D} \subset \subset X^*$, *будем называть* (*асинхронно, оконно, синхронно*) *автоматной функцией над алфавитами* X *и* Y, *если существуют частичный* (*асинхронный, оконный, синхронный*) *автомат* A *и состояние* q_0 *этого автомата такие, что* $\mathrm{Dom}\, f_{A,q_0} = D$, $\mathrm{Dom}\, \widehat{f_{A,q_0}} = \hat{D}$ *и* $f = f_{A,q_0}$ *или* $\hat{f} = \widehat{f_{A,q_0}}$.

Различные частичные автоматы с выделенными состояниями (такие автоматы также называют инициальными) могут определять одну и ту же функцию над множествами слов или ω-слов.

Определение 3. *Частичные автоматы* A, B *с выделенными состояниями* q_1 *и* q_2 *называются равносильными, если определяемые ими функции* $\widehat{f_{A,q_1}}$, $\widehat{f_{B,q_2}}$ *совпадают. Они называются* ω-*равносильными, если совпадают определяемые ими функции* f_{A,q_1}, f_{B,q_2}.

Из равносильности частичных автоматов с выделенными состояниями следует их ω-равносильность. Обратное верно только для синхронных автоматов. Легко проверяется, что существуют ω-равносильные асинхронные и оконные инициальные автоматы, не являющиеся равносильными. Соответствующий пример асинхронного автомата приведен в [5].

Каждый синхронный автомат равносилен некоторому автомату Мура, т. е. некоторому оконному автомату с шириной окна 1. Каждый оконный автомат равносилен некоторому асинхронному автомату. Поэтому класс (частичных) асинхронно автоматных функций содержит подкласс (частичных) оконно автоматных функций, а последний, в свою очередь, содержит подкласс (частичных) синхронно автоматных функций над заданными алфавитами.

Поскольку метрические свойства автоматных функций формулируются в терминах метрик на множествах всех ω-слов над данными алфавитами X, Y, далее будем рассматривать лишь функции на множествах ω-слов.

Вообще говоря, асинхронный автомат может преобразовывать бесконечные слова как в бесконечные, так и в конечные, поскольку значением его функции выхода можеть быть пустое слово. Асинхронный автомат A будем называть невырожденным [7], если в любом из своих состояний он реализует частичную функцию из X^ω в Y^ω. Далее мы будем рассматривать только невырожденные асинхронные автоматы, т. е. „асинхронный автомат” означает „невырожденный асинхронный автомат”.

Согласно изложенному выше, каждый автомат A, находясь в состоянии q, определяет частичную функцию $f_{A,q}$ из X^ω в Y^ω. Пусть $D_{A,q}$ — область определения $f_{A,q}$, $V_{A,q}$ — ее область значений. Паре (A, q) соответствует тройка $(D_{\mathrm{A},q}, f_{\mathrm{A},q}, V_{\mathrm{A},q})$, где $D_{\mathrm{A},q} \subseteq X^{\omega}$, $V_{\mathrm{A},q} \subseteq Y^{\omega}$, $f_{\mathrm{A},q} : D_{\mathrm{A},q} \to V_{\mathrm{A},q}$ — сюрьективное отображение.

Лемма 4. *Для произвольного автомата* $\mathrm{A} = \langle X, Y, Q, \varphi, \psi\rangle$ *типа* 1 – 3 *и любого его состояния* q *множества* $D_{\mathrm{A},q}$, $V_{\mathrm{A},q}$ *являются замкнутыми подмножествами точек в метрических пространствах* X^{ω} *и* Y^{ω} *соответственно.*

Доказательство. Последовательность $x_1x_2 \ldots$, содержащаяся в X^{ω} (или Y^{ω}), принадлежит $D_{\mathrm{A},q}$ (соответственно $V_{\mathrm{A},q}$) тогда и только тогда, когда в диаграмме Мура автомата A существует ориентированный путь с началом в q такой, что конкатенация левых (соответственно правых) половин меток стрелок пути равна $x_1x_2 \ldots$. Пусть E — множество стрелок диаграммы Мура. Множество всех путей с началом в q является замкнутым подмножеством прямого (тихоновского) произведения E^{∞}, так как оно определяется условиями на отдельные координаты (конец стрелки является началом следующей стрелки, а начало первой стрелки равно q). Следовательно, пространство всех путей компактно. Функция, ставящая в соответствие пути конкатенацию его левых (правых) меток, непрерывна (так как определена покоординатно). Следовательно, множество ее значений (равное $D_{\mathrm{A},q}$ и $V_{\mathrm{A},q}$ соответственно) также компактно, а значит, замкнуто.

Лемма 4 доказана.

Пусть $A_1 = \langle X, Y, Q_1, \pi_1, \lambda_1\rangle$ и $A_2 = \langle Y, Z, Q_2, \pi_2, \lambda_2\rangle$ — два асинхронных автомата. Определим новый автомат $B = A_1 * A_2$ с множеством состояний $Q_1 \times Q_2$, функцией переходов π и функцией выходов λ, заданных равенствами

$$\pi\big((q_1, q_2), x\big) = \big(\pi_1(q_1, x), \pi_2\big(q_2, \lambda_1(q_1, x)\big)\big),$$

$$\lambda\big((q_1, q_2), x\big) = \lambda_2\big(q_2, \lambda_1(q_1, x)\big).$$

Непосредственно проверяется, что для любых состояний $q_1 \in Q_1$ и $q_2 \in Q_2$ имеет место функциональное равенство

$$f_{A_2,q_2}(f_{A_1,q_1}) = f_{B,(q_1,q_2)}.$$

3. Категории автоматных отображений. ***3.1.*** Категорию автоматных отображений определим следующим образом. Объектами категории $\mathfrak{A}$ являются замкнутые подмножества без изолированных точек в пространствах ω-слов над конечными алфавитами. Морфизмами категории $\mathfrak{A}$ являются отображения, определяемые асинхронными автоматами.

Теорема 1. *Пусть* X, Y — *произвольные конечные алфавиты. Для любых замкнутых подмножеств* $U \subseteq X^{\omega}$, $V \subseteq Y^{\omega}$, *не содержащих изолированных точек, существует асинхронный автомат* A *с входным алфавитом* X *и выходным алфавитом* Y *такой, что для некоторого внутреннего состояния* q *справедливы равенства* $D_{\mathrm{A},q} = U$, $V_{\mathrm{A},q} = V$.

Для оконных автоматов аналог теоремы 1 не имеет места, существуют пары замкнутых подмножеств $U \subseteq X^{\omega}$, $V \subseteq Y^{\omega}$, не содержащих изолированных точек, для которых не существуют оконный автомат A и его состояние q такие, что $D_{\mathrm{A},q} = U$, $V_{\mathrm{A},q} = V$. Соответствующий пример будет приведен в следующем пункте.

Следующая теорема характеризует различные типы автоматных отображений в топологических терминах.

Теорема 2. *Пусть* U, V — *произвольные замкнутые подмножества без изолированных точек пространств* X^{ω} *и* Y^{ω} *соответственно. Сюрьекция* $f\colon U \to V$ *будет непрерывным отображением (соответственно липшицевым отображением, не увеличивающим расстояния) тогда и только тогда, когда* f *определяется некоторым частичным асинхронным (соответственно оконным, синхронным) автоматом над алфавитами* X *и* Y.

В случае всюду определенных асинхронных автоматов аналог теоремы 2 доказан в [5].

Категория $\mathfrak{A}$ содержит две естественные подкатегории $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ с теми же объектами, что и $\mathfrak{A}$. Морфизмами в первой из них будут отображения, задаваемые всевозможными оконными, а во второй — всеми синхронными автоматами. Эти категории с точностью до эквивалентности могут быть охарактеризованы в терминах соответствующих свойств метрических пространств.

Непосредственным следствием теоремы 2 является следующая теорема.

Теорема 3. 1. *Категория* $\mathfrak{A}$ *эквивалентна категории ограниченных компактных ультраметрических пространств без изолированных точек, морфизмами которой являются непрерывные отображения.*

2. *Категория* $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$ *эквивалентна категории ограниченных компактных ультраметрических пространств без изолированных точек, морфизмами которой являются липшицевые отображения.*

3. *Категория* $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ *эквивалентна категории ограниченных компактных ультраметрических пространств без изолированных точек, морфизмами которой являются отображения, не увеличивающие расстояния.*

3.2. Каждая из указанных категорий автоматных отображений имеет конечноавтоматный аналог — категорию, объектами которой являются так называемые рациональные множества ω-слов, а морфизмы задаются конечными автоматами соответствующего типа.

Рациональные множества определяются следующим образом. Пусть $U \subset \subset X^{\omega}$ — замкнутое подмножество ω-слов над алфавитом X, не содержащее изолированных точек, $v \in X^*$ — некоторое слово над X. Подмножество

$$U(v) = \left\{ w \in X^{\omega} : vw \in U \right\}$$

назовем подмножеством v-вычетов ω-слов из U. Множества $U(v)$ могут быть пустыми, конечными или бесконечными, могут совпадать для различных $v \in X^*$. Замкнутое подмножество $U \subset X^{\omega}$ без изолированных точек назовем рациональным, если семейство подмножеств его вычетов является конечным:

$$\left| \left\{ U(v) : v \in X^* \right\} \right| < \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* X, Y — *фиксированные алфавиты. Для произвольных рациональных подмножеств* $U \subset X^{\omega}$, $V \subset Y^{\omega}$ *существует конечный асинхронный автомат* A *с выделенным внутренним состоянием* q *такой, что* $D_{\mathrm{A},q} = U$, $V_{\mathrm{A},q} = V$.

Для частичных функций из X^{ω} в Y^{ω} определены понятия состояния функции и функции с конечным числом состояний [9]. А именно, для частичной функции $f\colon X^{\omega} \to Y^{\omega}$ ее состоянием, соответствующим слову $u \in X^*$, называется частичная функция $f_u : X^{\omega} \to Y^{\omega}$, определяемая равенством

$$f_u(w) = \Pi_{|u|}\bigl(f(uw)\bigr), \quad w \in X^{\omega},$$

где символом Π_k обозначается оператор отсекания префикса длины k в ω-словах. Говорят, что f — функция с конечным числом состояний, если множество ее состояний конечно.

Теорема 5. *Пусть* U, V *— произвольные рациональные подмножества пространств* X^{ω} *и* Y^{ω} *соответственно. Сюрьекция* $f\colon U \to V$ *будет непрерывным (соответственно липшицевым, изометрическим) отображением с конечным числом состояний тогда и только тогда, когда* f *задается конечным асинхронным (соответственно оконным, синхронным) автоматом над алфавитами* X, Y.

4. Доказательства. ***4.1.*** Сформулируем вначале ряд утверждений, из которых будут следовать доказательства теорем 1 и 4.

Лемма 5. *Пусть* X *— алфавит,* A *— непустое подмножество пространства* X^{ω}. *Точка* $\omega \in A$ *будет изолированной в* A *тогда и только тогда, когда существуют такой префикс* u ω*-слова* w, *что* $D_u \bigcap A = \{w\}$.

Лемма следует из определения изолированной точки и общего вида шара в пространстве X^{ω}.

Таким образом, в замкнутом подмножестве без изолированных точек пространства X^{ω} каждый префикс любого ω-слова из этого подмножества будет префиксом еще одного ω-слова из этого подмножества.

Зафиксируем произвольные алфавиты $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 2$, и двухэлементный алфавит $Y = \{0, 1\}$. Для каждого натурального $n \geq 2$ выберем множество W_n непустых слов над алфавитом Y, состоящее из n элементов, которое содержит какой-нибудь префикс каждого слова над алфавитом Y, но никакое слово из W_n не является префиксом другого слова из W_n. В частности, в качестве множества W_{2^k} можно выбрать множество всех слов длины k, $k \geq 1$, над алфавитом Y. В общем случае построение этих множеств можно проводить индуктивно, включая в W_n слово 0 и все слова вида $1w$, $w \in W_{n-1}$.

Для каждого $A \subset X_n$, $n \geq 2$, $|A| = m \geq 2$, зафиксируем некоторую биекцию

$$f_A : A \to W_m.$$

Понятно, что отображение

$$F_A : A^{\omega} \to Y^{\omega},$$

определяемое равенством

$$F_A(y_1 y_2 y_3 \ldots) = f_A(y_1) f_A(y_2) f_A(y_3) \ldots, \qquad \text{где} \qquad y_1 y_2 y_3 \ldots \in A^{\omega},$$

является гомеоморфизмом.

Лемма 6. *Для любого замкнутого подмножества* $U \subseteq X_n^{\omega}$, *не содержащего изолированных точек, существует асинхронный автомат* A *с входным алфавитом* X_n *и выходным алфавитом* Y *такой, что для некоторого внутреннего состояния* q *справедливы равенства* $D_{\mathrm{A},q} = U$, $V_{\mathrm{A},q} = Y^{\omega}$. *В случае рационального множества* U *автомат* A *можно выбрать конечным.*

Доказательство. Построим необходимый автомат A в общем случае. Обозначим символом $\Pi(U)$ множество всех возможных префиксов всех ω-слов из U. В качестве множества внутренних состояний автомата A используем множество $\Pi(U)$. Областью определения функций переходов φ и выходов ψ будет множество таких пар $(w, x) \in \Pi(U) \times X_n$, что $wx \in \Pi(U)$. В этом случае полагаем $\varphi(w, x) = wx$.

Для каждого слова $w \in \Pi(U)$ определим его степень ветвления $d(w)$ как мощность подмножества A_w символов x алфавита X_n таких, что $wx \in \Pi(U)$. Для всех слов w, имеющих степень ветвления 1, положим $\psi(w, x) = \varnothing$, в противном случае полагаем $\psi(w, x) = f_A(x)$, где $A = A_w$, $x \in A_w$.

Тогда для внутреннего состояния $q = \varnothing$ так определенного автомата A будут выполняться равенства $D_{\mathrm{A},q} = U$, $V_{\mathrm{A},q} = Y^{\omega}$.

Заметим, что для слов $v, w \in \Pi(U)$, для которых соответствующие им подмножества вычетов $U(v)$ и $U(w)$ равны, определяемые ими функции $f_{\mathrm{A},v}$ и $f_{\mathrm{A},w}$ совпадают. Это означает, что состояния v и w автомата A можно отождествить и полученный таким образом новый автомат также будет удовлетворять требуемым в условии равенствам. Если же множество U рационально, то, отождествив состояния, которым соответствуют равные множества вычетов, получим конечный автомат, удовлетворяющий условию.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для любого замкнутого подмножества $U \subseteq X_n^{\omega}$, не содержащего изолированных точек, существует асинхронный автомат A с входным алфавитом X_n и выходным алфавитом Y такой, что для некоторого внутреннего состояния q справедливы равенства $D_{\mathrm{A},q} = Y^{\omega}$, $V_{\mathrm{A},q} = U$. В случае рационального множества U автомат A можно выбрать конечным.*

Доказательство. Вначале построим конечный автомат A_1, устанавливающий гомеоморфизм между Y^{ω} и X_n^{ω}. Множеством его внутренних состояний будет множество $\Pi(W_n)$ всех префиксов слов из W_n. Для слова $v \in \Pi(W_n)$ и символа $y \in Y$ значения функций переходов φ_1 и выходов ψ_1 определим так:

$$\varphi_1(v, y) = \begin{cases} vy, & \text{если } v \notin W_n, \\ \varnothing, & \text{если } v \in W_n, \end{cases}$$

$$\psi_1(v, y) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } vy \notin W_n, \\ f_{X_n}^{-1}(vy), & \text{если } vy \in W_n. \end{cases}$$

Определяемое автоматом A_1 в состоянии $\varnothing$ отображение будет гомеоморфизмом Y^{ω} на X_n^{ω}.

Теперь определим синхронный автомат A_2 с входным и выходным алфавитом X_n и множеством внутренних состояний X_n^*. Для произвольных слова $v \in X_n^*$ и символа $x \in X_n$ значение функции переходов φ_2 положим равным vx. Если $vx \in \Pi(U)$, то значение функции выходов ψ_2 будет равным x. Если же $vx \notin \Pi(U)$, то выберем символ $y \in X_n$ и ω-слово u такие, что $vyw \in U$, причем для слов с равными подмножествами вычетов выбранные символ и ω-слово соответственно также равны. Определим $\psi_2(v, x) = \psi(v, y)$. Также для любого слова v_1, префиксом которого является слово vx, и любого символа $z \in X_n$ положим $\psi_2(v_1, z) = \psi_2(u, z_1)$, где uz_1 — префикс ω-слова vyw длины, равной длине слова $v_1 z$. Таким образом, функция выходов ψ_2 будет всюду определенной. Так заданный автомат A_2 в состоянии $\varnothing$ реализует ретракцию на X_n^* с областью значений U. Заметим, что для двух слов v, $w \in \Pi(U)$, для которых соответствующие им подмножества вычетов $U(v)$ и $U(w)$ равны, определяемые ими функции $f_{\mathrm{A}_2, v}$ и $f_{\mathrm{A}_2, w}$ совпадают. Это означает, что, как и в доказательстве леммы 6, в случае рационального множества U автомат A_2 можно заменить конечным.

Остается рассмотреть суперпозицию построенных автоматов, которая в состоянии $(\varnothing, \varnothing)$ будет определять требуемое отображение.

Лемма 7 доказана.

Теоремы 1 и 4 следуют теперь из лемм 6 и 7 при применении суперпозиции построенных в их доказательстве автоматов.

4.2. Для доказательства оставшихся теорем нам понадобится следующее определение энтропии.

Определение 4. *Пусть* $U \subset X^{\omega}$ *— замкнутое множество. Энтропией множества* U *называется предел*

$$h(U) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(|U_n|\right)}{n},$$

если он существует, где U_n *— множество префиксов длины* n *элементов множества* U.

Лемма 8. *Оконные автоматы определяют липшицевые отображения и не увеличивают энтропию множеств.*

Доказательство. Пусть k — ширина окна инициального оконного автомата A_q. Тогда начало длины n слова $A_q(w)$ зависит только от начала длины $n+k$ слова w. Из этого следует, что отображение A_q липшицево. Кроме того, если U — некоторое множество бесконечных слов, то из вышеизложенного следует , что

$$\left|A_q(U)_n\right| \leq \left|U_{n+k}\right|.$$

Следовательно,

$$h\big(A_q(U)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\left|A_q(U)_n\right|\right)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(|U_{n+k}|\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(|U_{n+k}|\right)}{n+k} = h(U).$$

Лемма 8 доказана.

В частности, непосредственно из предыдущей леммы следует, что не существует оконного автомата, биективно преобразующего X^{ω} в Y^{ω} для $|X| \neq |Y|$, поскольку $h(X^{\omega}) = \log|X|$.

Лемма 9. *Любое липшицево отображение замкнутых подмножеств пространств слов определяется некоторым оконным автоматом.*

Доказательство. Непосредственно из определения метрики на пространстве последовательностей следует, что если отображение $f\colon U \to V$ липшицево, то существует такое k, что если w_1, $w_2 \in U$ имеют общее начало длины

n, то $f(w_1)$ и $f(w_2)$ имеют общее начало длины $n-k$.

Из этого следует, что асинхронный автомат, реализующий отображение f, построенный в доказательстве теоремы 2.4 в работе [5], является липшицевым.

Лемма 9 доказана.

Теоремы 2 и 5 следуют из предыдущей леммы и теоремы 2.4 работы [5].

1. *Jean-Paul Allouche, Jeffrey Shallit.* Automatic sequences: theory, applications, generalizations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – 588 p.
2. *Pytheas Fogg N.* Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. – Berlin etc.: Springer, 2002. – 402 p.
3. *Dominique Perrin, Jean-Èric Pin.* Infinite worlds: automata, semigroups, logic and games. – Amsterdam etc.: Acad. Press, 2004. – 550 p.
4. *Lind D., Marcus B.* An introduction to symbolic dynamics and coding. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
5. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Труды Мат. ин-та РАН. – 2000. – **231**. – С. 134 – 214.
6. *Nekrashevych V.* Self-similar groups // Math. Surv. and Monogr. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. – **117**.
7. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В.* Группа асинхронных автоматов и рациональные гомеоморфизмы Кантора // Мат. заметки. – 2001. – **67**, № 5. – С. 680 – 685.
8. *Eilenberg S.* Automata, languages and machines. – New York; London: Acad. Press, 1974.
9. *Raney G. N.* Sequential functions // J. Assoc. Comput. Math. – 1958. – **5**, № 2. – P. 177 – 180.

Получено 22.10.09