УДК 531.36

А. М. Приз (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕХАНІЧНІ АНАЛОГІЇ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

The linear system of differential equations with pulse influence is considered for which the condition of construction of its mechanical analogs is obtained.

Рассмотрена линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, для которой получено условие построения ее механических аналогий.

Побудову загальної теорії систем з імпульсною дією та їх якісний аналіз викладено в монографіях [1, 2] та ін. Диференціальні рівняння з імпульсною дією виникають при математичному моделюванні реальних процесів з короткочасними збуреннями [3 – 7]. У статті [8] розв'язано задачу знаходження механічної аналогії для системи диференціальних рівнянь у формі Коші без імпульсної дії, при цьому відповідна задача при наявності імпульсів залишалася відкритою. У даній роботі отримано умову існування й алгоритм побудови механічних аналогій для лінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Будемо досліджувати лінійні системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією вигляду [1]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \neq \tau_k, \\ x(t^+) &= \tilde{P}x(t), \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $x \in \mathbb{R}_{2n}$, $\tilde{A}$, $\tilde{P} \in \mathbb{R}_{2n \times 2n}$ — сталі матриці, а моменти імпульсної дії задовольняють двосторонню оцінку $0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty$.

Запишемо систему (1) у вигляді

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x(t_0) = y_0, \quad t \neq \tau_k, \\ \begin{bmatrix} x_1(t^+) \\ x_2(t^+) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots , \end{aligned} \tag{2}$$

де всі матриці мають однаковий порядок. Саме така блочна форма запису властива задачі про механічні аналогії.

Для першого рівняння системи (1) доведено наступну теорему [8].

Теорема 1. *Стаціонарна лінійна система*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x(t_0) = x_0,$$

де $x_i \in \mathbb{R}_n$, $\tilde{A}_{ij} \in \mathbb{R}_{n \times n}$, $i, j = 1, 2,$ *лінійним стаціонарним перетворенням вектора стану*

$$y = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{11}\tilde{A}_{11} + T_{12}\tilde{A}_{21} & T_{11}\tilde{A}_{12} + T_{12}\tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

зводиться до вигляду

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y(t_0) = y_0$$

($y_i \in \mathbb{R}_n$, $I \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — *одинична матриця*), *тоді і тільки тоді*, *коли для всіх власних значень* λ_i *матриці* $\tilde{A}$ *виконуються умови*

$$\operatorname{rank}(\tilde{A} - \lambda_i I) \geq n, \qquad i = \overline{1, 2n},$$

де $I \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$, *а матриці* B *і* C *знаходяться аналітично з рівності* $\begin{bmatrix} C & B \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \tilde{A}^2 T^{-1}$.

У теоремі 1 і скрізь далі через матрицю I позначаємо одиничну матрицю. Її порядок завжди дорівнює n або $2n$, що буде легко видно з виразів, до складу яких вона входить.

Побудуємо для (1) механічну аналогію [8]. Будемо вважати, що для першого рівняння системи (1), (2) має місце теорема 1. Тоді, застосовуючи (3) до (2), в загальному випадку отримуємо

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ay(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad t \neq \tau_k, \\ y(t^+) &= Py(t), \qquad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

де $A = T\tilde{A}T^{-1}$, $P = T\tilde{P}T^{-1}$. Звідси випливає еквівалентність матриць A та $\tilde{A}$ і P та $\tilde{P}$. Запишемо (4) у блочній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad y(t_0) = y_0, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t^+) \\ y_2(t^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

У загальному випадку матриця P не має визначеної канонічної форми. Але нас буде цікавити її спеціальний вигляд

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ M & I \end{bmatrix}, \qquad |M| \neq 0. \tag{5}$$

Більш детально канонічна форма (5) та властивості матриці $\tilde{P}$ будуть досліджені нижче.

Оскільки перше рівняння в системі (4) є механічною аналогією [8] першого рівняння з (2), то зупинимося на других рівняннях обох систем та знайдемо умови, при виконанні яких рівняння

$$y(t^+) = Py(t), \qquad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

буде механічною аналогією для

$$x(t^+) = \tilde{P}x(t), \qquad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а матриця M буде матрицею узагальнених імпульсів ударних сил.

Для цього наведемо необхідні теоретичні відомості [9]. У випадку, коли сили діють на достатньо короткому проміжку часу (наприклад, при зіткненні двох тіл), їх називають імпульсними [9]. Під імпульсом сили F розуміють інтеграл

$$\int_{\Delta t} F\,dt,$$

де Δt — нескінченно малий проміжок часу, під час якого діє ця сила. При наявності імпульсних сил рівняння Лагранжа у введених позначеннях можна записати у вигляді

$$\frac{\partial L(t^+)}{\partial \dot q_j(t^+)} - \frac{\partial L(t)}{\partial \dot q_j(t)} = S_j, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

де координати q_j системи до дії імпульсу позначено як $q_j(t)$, а після дії — як $q_j(t^+)$, $S_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} q_i$ — узагальнений імпульс ударної сили, L — лагранжіан системи.

Оскільки $L = T - \Pi$, $T = \dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot q_i \dot q_j$ і $\Pi = \dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j$, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot q_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} q_i .$$

При цьому рівняння (6) можна записати в такій формі:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Big(\dot q_i(t^+) - \dot q_i(t)\Big) = \sum_{i=1}^n d_{ij} q_j . \tag{7}$$

Перейдемо в рівнянні (7) від координатної форми до матричної, позначивши $A = (a)_{i,j=1}^n > 0$, $D = (d)_{i,j=1}^n$. Розглянемо випадок, коли матриця D є невиродженою. Тоді рівняння (7) запишемо у вигляді

$$A\dot q(t^+) = A\dot q(t) + Dq(t).$$

Виконаємо заміну $y = Aq$, після чого отримаємо

$$\dot y(t^+) = \dot y(t) + My(t), \qquad M = DA^{-1}.$$

Відомо, що під дією імпульсних сил координати системи не змінюються. Ця фізична властивість імпульної системи задається умовою $y(t^+) = y(t)$, яка разом з останнім рівнянням після заміни $y_1 = y$, $y_2 = \dot y$ утворює другу частину системи (4):

$$y_1(t^+) = y_1(t),$$

$$y_2(t^+) = My_1(t) + y_2(t),$$

або

$$y(t^+) = \begin{bmatrix} I & O \\ M & I \end{bmatrix} y(t).$$

Наступна лема містить умови зведення матриці $\tilde P$ до P вигляду (5).

Лема 1. *Якщо для матриці* $\tilde P \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ *виконуються умови*:

1) *всі власні значення матриці* $\tilde P$ *дорівнюють одиниці*;

2) *форма Жордана матриці* $\tilde P$ *не містить клітин порядку вище другого, до того ж кількість таких клітин дорівнює* n;

3) *справджується тотожність* $\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-2}\tilde{P}_{21} = -I$, *де* $\tilde{P}_{ij}$ — *квадратні матриці порядку* n,
то вона подібна до матриці P *вигляду*

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ M & I \end{bmatrix}, \qquad |M| \neq 0.$$

Доведення. З рівності $PT = T\tilde{P}$ отримуємо

$$(P - I)T = \begin{bmatrix} O & O \\ M & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} - I & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} - I \end{bmatrix} = T(\tilde{P} - I), \tag{8}$$

де $\tilde{P} - I \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — матриця рангу n. Будемо вважати, що матриця $\tilde{P}_{22} - I$ невироджена, тоді справджується рівність [10] $\tilde{P}_{11} - I = \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21}$, після підстановки якої в (8) одержуємо

$$\begin{bmatrix} O & O \\ M & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} - I \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{aligned} &T_{11}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21} + T_{12}\tilde{P}_{21} = 0, \\ &T_{11}\tilde{P}_{12} + T_{12}(\tilde{P}_{22} - I) = 0, \\ &T_{21}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21} + T_{22}\tilde{P}_{21} = MT_{11}, \\ &T_{21}\tilde{P}_{12} + T_{22}(\tilde{P}_{22} - I) = MT_{12}. \end{aligned}$$

Для зручності останню систему запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} &\left(T_{11}\tilde{P}_{12} + T_{12}(\tilde{P}_{22} - I)\right)(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21} = 0, \\ &T_{11}\tilde{P}_{12} + T_{12}(\tilde{P}_{22} - I) = 0, \\ &\left(T_{21}\tilde{P}_{12} + T_{22}(\tilde{P}_{22} - I)\right)(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\tilde{P}_{21} = MT_{11}, \\ &T_{21}\tilde{P}_{12} + T_{22}(\tilde{P}_{22} - I) = MT_{12}, \end{aligned}$$

звідки отримаємо умову звідності матриці $\tilde{P} - I$ до $P - I$ або $\tilde{P}$ до P:

$$\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-2}\tilde{P}_{21} = -I. \tag{9}$$

Невиродженість M випливає з того, що для матриць P вигляду (5) порядок клітин Жордана не перевищує 2 та кількість таких клітин дорівнює рангу M.

Лему доведено.

Встановимо тепер умови, які повинні задовольняти $\tilde{A}$ і $\tilde{P}$ для одночасного їх зведення до A та P претворенням (3). Тим самим виділимо клас імпульсних систем, для яких існує їх механічна аналогія (2), (5).

Теорема 2. *Нехай для матриць імпульсної системи* (1), (2) *справджуються теорема* 1, *лема* 1 *і умова*

$$\det\left(\left[I - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\right]\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\\ I\end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

Тоді існує перетворення $y = Tx$ *вигляду*

$$T = \begin{bmatrix}T_{11} & O\\ O & T_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\\ A_{11} - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}A_{21} & A_{12} - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}A_{22}\end{bmatrix},$$

з допомогою якого з системи (1), (2) *можна отримати її механічну аналогію вигляду*

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}O & I\\ -C & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}, \quad y(t_0) = y_0, \quad t \neq \tau_k,\\ \begin{bmatrix}y_1(t^+)\\ y_2(t^+)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & O\\ M & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}, \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots.\end{gathered} \tag{10}$$

Доведення. Із системи

$$\begin{gathered}T_{12} = -T_{11}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1},\\ MT_{11} - T_{22} - T_{21}\tilde{P}_{12}\tilde{P}_{22} = 0\end{gathered} \tag{11}$$

з урахуванням (3) та (9) отримуємо матрицю T, яка одночасно зводить $\tilde{A}$ до A і $\tilde{P}$ до P:

$$T = \begin{bmatrix}T_{11} & O\\ O & T_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\\ A_{11} - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}A_{21} & A_{12} - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}A_{22}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Підставимо компоненти матриці T із (12) у друге рівняння системи (11) та одержимо вираз для матриці M в явному вигляді

$$M = T_{11}\left[I - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\right]\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\\ I\end{bmatrix}T_{11}^{-1}. \tag{13}$$

Доведемо одночасну невиродженість матриць T і M та встановимо відповідну залежність між $\tilde{A}$ і $\tilde{P}$. Проаналізуємо вирази (3), (12) та (13) для матриць T і M відповідно. Матриця T із (3) повинна бути невиродженою. Виникає питання про невиродженість матриці T із (12), де для її „добудови" використано відповідні блоки матриці $\tilde{P} - I$ із (8). Виходячи з формули для визначника блочної матриці [10]

$$\Delta = \begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

де враховано, що $AB = BA$, $AC = CA$, умову невиродженості T із (12) записуємо у вигляді

$$\det\left(\left[I - \tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\right]\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1}\\ I\end{bmatrix}\right) \neq 0. \tag{14}$$

Легко бачити, що умова (14) та невиродженість матриці M із (13) та T із (12) виконуються тоді і тільки тоді, коли стовпці матриці

$$\left[\tilde{P}_{12}(\tilde{P}_{22} - I)^{-1} \; I\right]^T$$

не будуть містити жодного власного вектора матриці $\tilde{A}$, який відповідає її нульовому власному значенню.

Теорему доведено.

Зазначимо, що оскільки вибір матриці T_{11} в теоремі 2 не є однозначним, має місце множина механічних аналогій для однієї імпульсної системи. Така неоднозначність дозволяє за допомогою вільних параметрів матриці T_{11} виконати певні спрощення структури матриць B і C із (10) або звести матрицю M до форми Жордана.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Цыпкин Я. З.* Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1958. – 724 с.
3. *Martynyuk A. A., Shen J. N., Stavroulakis I. P.* Stability theorems in impulsive equations with infinite delay // Advances in Stability Theory at the End of the 20 th Century / Ed. A. A. Martynyuk. – London; New York: Taylor and Francis, 2003. – P. 153 – 175.
4. *Ларин В. Б.* Управление шагающими аппаратами. – Киев: Наук. думка, 1980. – 168 с.
5. *Ларин В. Б.* К вопросу построения модели шагающего аппарата // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 4. – С. 122 – 132.
6. *Слынько В. И.* Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 68 – 71.
7. *Денисенко В. С., Слынько В. И.* Импульсная стабилизация механических систем в моделях Такаги – Сугено // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 10.
8. *Новицький В. В., Петришина Л. В.* Декомпозиція та механічні аналогії. 1. Лінійні стаціонарні системи // Вопросы аналитической механики и ее применений: Праці Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **26**. – С. 251 – 256.
9. *Голдстейн Г.* Классическая механика. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Одержано 23.03.10