УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОТКРЫТЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

We study the problem of extension of mappings $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, to the boundary of a domain D. Under certain conditions imposed on a measurable function $Q(x), Q\colon D \to [0, \infty]$, and the boundaries of the domains D and $D' = f(D)$, we show that an open discrete mapping $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, with quasiconformality characteristic $Q(x)$ can be extended to the boundary ∂D by continuity. The obtained statements extend the corresponding Srebro's result to mappings with bounded distortion.

Вивчаються питання продовження відображень $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, на межу області D. За певних умов на вимірну функцію $Q(x)$, $Q\colon D \to [0, \infty]$, і межі областей D і $D' = f(D)$, показано, що відкрите дискретне відображення $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, яке має характеристику квазіконформності $Q(x)$, продовжується неперервним чином на межу ∂D. Отримані твердження поширюють відповідний результат У. Сребро для відображень з обмеженим спотворенням.

1. Введение. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Основные определения и обозначения, используемые в настоящей работе, но не приводимые ниже, можно найти, например, в статьях [1, 2], а также в монографии [3]. Границу ∂D, замыкание $\overline{D}$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ (либо области $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$), а также наличие предела для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ (либо $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$) в дальнейшем будем понимать в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно *хордальной метрики* h, определенной соотношениями

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,, \quad h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,, \quad x \neq \infty \neq y\,.$$

Основной целью настоящей статьи является распространение одного утверждения, известного для отображений с ограниченным искажением (см., например, [4, 5]), на более широкий класс отображений. По этому поводу см. теорему 4.2 в работе У. Сребро [6], а также теорему 4.10 в диссертации М. Вуоринена [7] (разд. 4, гл. II). Пусть E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Здесь и далее

$$A(r_1, r_2, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение следующую конструкцию (см. разд. 7.6, гл. VII в [3]). Пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \notin D$. Говорят, что отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$, если для некоторого $r_0 = r(x_0)$ и произвольных сферического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, центрированного в точке x_0, радиусов r_1, r_2, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$, и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0, r_2)\right) \cap D$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$M\left(f\left(\Gamma\left(E_1,\, E_2,\, D\right)\right)\right) \,\leq \int\limits_A Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\; dm(x) \tag{2}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ \geq \ 1\,. \tag{3}$$

Отметим, что при $Q(x) \leq K'$ соотношение (2) влечет условие $M(f(\Gamma)) \leq K' \cdot M(\Gamma)$ для семейств кривых Γ, соединяющих сферы $S(x_0, r_1)$ и $S(x_0, r_2)$, как только $x_0 \in D$ и $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$; это, вообще говоря, нельзя утверждать относительно любого семейства Γ кривых γ в D. Отметим также, что произвольное отображение f с ограниченным искажением удовлетворяет соотношениям вида (2), (3) с Q, равным некоторой постоянной.

Будем говорить, что граница ∂D области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что $M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta$ для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V (см., например, разд. 3.8 в [3]). Одним из наиболее важных результатов настоящей статьи является следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $b \in \partial D$, $f(D) = D'$, *область* D *локально связна в точке* b, $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ *и область* D' *сильно достижима хотя бы в одной точке* $y \in C(f, b)$. *Предположим, что функция* Q *имеет конечное среднее колебание в точке* b. *Тогда* $C(f, b) = \{y\}$.

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Следующая лемма доказана В. И. Рязановым и Р. Р. Салимовым для случая гомеоморфизмов (см. лемму 5.1 [8]) и представляет собой основной результат настоящей работы в наиболее общем случае.

Лемма 1. *Пусть* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $b \in \partial D$, $b \neq \infty$, $f(D) = D'$, *область* D *локально связна в точке* b, $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ *и область* D' *сильно достижима хотя бы в одной точке* $y \in C(f, b)$. *Предположим, что найдутся* $\varepsilon_0 > 0$ *и некоторая положительная измеримая функция* $\psi(t)$, $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to (0, \infty)$, *такая, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \tag{4}$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, b)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - b|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon))\,, \tag{5}$$

где $A := A(\varepsilon, \varepsilon_0, b)$ *определено в* (1). *Тогда* $C(f, b) = \{y\}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся, по крайней мере, две последовательности $x_i, x_i' \in D$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_i \to b$, $x_i' \to b$ при $i \to \infty$, $f(x_i) \to y$, $f(x_i') \to y'$ при $i \to \infty$ и $y' \neq y$. Отметим, что y и y' принадлежат $\partial D'$, так как по условию $C(f, \partial D) \subset \partial D'$. По определению сильно достижимой границы в точке $y \in \partial D'$ для любой окрестности U этой точки найдутся компакт $C_0' \subset D'$, окрестность V точки y, $V \subset U$, и число

$\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(C_0', F, D')) \geq \delta > 0 \tag{6}$$

для произвольного континуума F, пересекающего ∂U и ∂V. В силу предположения $C(f, \partial D) \subset \subset \partial D'$ для $C_0 := f^{-1}(C_0')$ выполнено условие $C_0 \cap \partial D = \varnothing$. Тогда, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $C_0 \cap \overline{B(b, \varepsilon_0)} = \varnothing$. Поскольку область D локально связна в точке b, можно соединить точки x_i и x_i' кривой γ_i, лежащей в $V \cap D$. Можно также считать, что $\gamma_i \in \overline{B(b, 2^{-i})} \cap D$. Поскольку $f(x_i) \in V$ и $f(x_i') \in D \setminus \overline{U}$ при всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$, найдется номер $i_0 \in \mathbb{N}$ такой, что согласно (6)

$$M(\Gamma(C_0', f(\gamma_i), D')) \geq \delta > 0 \tag{7}$$

при всех $i \geq i_0 \in \mathbb{N}$. Обозначим через Γ_i семейство всех полуоткрытых кривых $\beta_i \colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\beta_i(a) \in f(\gamma_i)$, $\beta_i(t) \in D'$ при всех $t \in [a, b)$ и, кроме того, $\lim_{t \to b-0} \beta_i(t) := B_i \in C_0'$. Очевидно, что

$$M(\Gamma_i) = M\left(\Gamma\left(C_0', f(\gamma_i), D'\right)\right). \tag{8}$$

При каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_0$, рассмотрим семейство Γ_i' максимальных поднятий $\alpha_i(t) \colon [a, c) \to D$ семейства Γ_i с началом во множестве γ_i. Такое семейство существует и определено корректно в силу следствия 3.3 гл. II в [5] (см. также замечание, приведенное выше). Прежде всего заметим, что никакая кривая $\alpha_i(t) \in \Gamma_i'$, $\alpha_i \colon [a, c) \to D$, не может стремиться к границе области D при $t \to c - 0$ в силу условия $C(f, \partial D) \subset \partial D'$. Тогда $C(\alpha_i(t), c) \subset D$. Предположим теперь, что кривая $\alpha_i(t)$ не имеет предела при $t \to c - 0$. Тогда предельное множество $C(\alpha_i(t), c)$ является континуумом в D. В силу непрерывности отображения f имеем $f \equiv \mathrm{const}$ на $C(\alpha_i(t), c)$, что противоречит предположению о дискретности f.

Следовательно, существует $\lim_{t \to c-0} \alpha_i(t) = A_i \in D$. Отметим, что в этом случае по определению максимального поднятия $c = b$. Тогда, с одной стороны, $\lim_{t \to b-0} \alpha_i(t) := A_i$, а с другой — в силу непрерывности отображения f в D

$$f(A_i) = \lim_{t \to b-0} f(\alpha_i(t)) = \lim_{t \to b-0} \beta_i(t) = B_i \in C_0'.$$

Отсюда по определению C_0 следует, что A_i принадлежит C_0. Погрузим компакт C_0 в некоторый континуум C_1, все еще полностью лежащий в области D (см. лемму 1 в [9]). За счет уменьшения $\varepsilon_0 > 0$ можно снова считать, что $C_1 \cap \overline{B(b, \varepsilon_0)} = \varnothing$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-i}), & t \in (2^{-i}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-i}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (3) при $r_1 := 2^{-i}$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому в силу определения кольцевого Q-отображения в граничной точке, а также условий (4), (5)

$$M\left(f\left(\Gamma_i'\right)\right) \leq \Delta(i), \tag{9}$$

где $\Delta(i) \to 0$ при $i \to \infty$. Однако $\Gamma_i = f(\Gamma_i')$, поэтому из (9) получим

$$M(\Gamma_i) = M\left(f(\Gamma_i')\right) \leq \Delta(i) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{10}$$

Но соотношение (10) вместе с равенством (8) противоречат неравенству (7), что и доказывает лемму.

3. Основные результаты. Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, $q_{x_0}(r) := \;:= \dfrac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-x_0|=r} Q(x)\,dS$, где dS — элемент площади поверхности S. Полагаем

$$q_b'(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-b|=r} Q'(x)\,dS\,, \quad Q'(x) = \left\{\begin{array}{rl} Q(x), & Q(x) \geq 1\,, \\ 1, & Q(x) < 1\,. \end{array}\right. \tag{11}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $b \in \partial D$, $b \neq \infty$, $f(D) = D'$, область D локально связна в точке b, $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ и область D' сильно достижима хотя бы в одной точке $y \in C(f, b)$. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*: 1) *функция Q имеет конечное среднее колебание в точке b*; 2) $q_b(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при $r \to 0$*; 3) *при некотором $\delta(b) > 0$ выполнено условие*

$$\int\limits_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t{q_b'}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,. \tag{12}$$

Тогда $C(f, b) = \{y\}$.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из доказанной выше леммы 1 и леммы 8 в [1].

***Замечание* 1.** Теорему 1 можно распространить на случай $b = \infty$, если в этой точке определить, например, с помощью инверсии $\varphi(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ соответствующие условия 1 – 3 этой теоремы.

Пусть $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая функция. Тогда *обратная функция* Φ^{-1} может быть корректно определена следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau) \;=\; \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t\;. \tag{13}$$

Как обычно, инфимум в (13) равен ∞, если множество $t \in [0,\infty]$ таких, что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей.

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $b \in \partial D$, $f(D) = D'$, область D локально связна в точке b, $C(f, \partial D) \subset \partial D'$ и область D' сильно достижима хотя бы в одной точке $y \in C(f, b)$. Предположим, что существуют число $M > 0$, неубывающая выпуклая функция $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ и окрестность U точки b такие, что*

$$\int\limits_{U} \Phi\left(Q'(x)\right) \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \ \leq\ M \tag{14}$$

и $\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$ *при некотором* $\delta_0 > \Phi(0)$. *Тогда* $C(f,b) = \{y\}$.

Функция Q', содержащаяся в неравенстве (14), определена соотношением (11). Заметим, что случай $b=\infty$ здесь также допускается.

Доказательство. Из теоремы 3.1 в [2] следует расходимость интеграла вида (12) при некотором $\delta(b) > 0$, остальное следует из леммы 1 и леммы 8 в [1].

***Замечание* 2.** Соотношения вида (2) установлены для многих классов отображений, например для так называемых отображений с конечным искажением длины при явных значениях $Q(x)$ (см., например, теорему 8.5 в [3], а также работу [10]).

1. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129 – 1146.
2. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 3. – С. 665 – 679.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
4. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
5. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results in Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
6. *Srebro U.* Conformal capacity and quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. – 1973. – **529**. – P. 1 – 8.
7. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Diss. – 1976. – **11**. – P. 1 – 44.
8. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – Р. 199 – 234.
9. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
10. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.

Получено 12.10.11