УДК 517.9

И. И. Ковтун (Нац. ун-т биоресурсов и природопользования Украины, Киев),
М. Н. Феллер (УкрНИИ „Ресурс”, Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ

We present solutions of the boundary-value problem $U(0,x)=u_0$, $U(t,0)=u_1$, and the external boundary-value problem $U(0,x)=v_0$, $U(t,x)\big|_{\Gamma}=v_1$, $\lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2$ for the nonlinear hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x)$$

with infinite-dimensional Lévy Laplacian Δ_L.

Для нелінійного гіперболічного рівняння з нескінченновимірним лапласіаном Леві Δ_L

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x)$$

наведено розв’язки крайової задачі $U(0,x)=u_0$, $U(t,0)=u_1$ і крайової зовнішньої задачі $U(0,x)=v_0$, $U(t,x)\big|_{\Gamma}=$ $=v_1$, $\lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2$.

1. Введение. Линейным гиперболическим уравнениям с лапласианом Леви посвящены работы [1–3].

Нелинейное гиперболическое уравнение с лапласианом Леви встречается лишь в статье [4], в которой рассматривались краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\dfrac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]=\Delta_LU(t,x)$ с дивергентной частью и с лапласианом Леви.

В настоящей статье приводится решение краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x),\qquad t>0,\quad x\in H,$$

$$U(0,x)=u_0,\qquad U(t,0)=u_1,$$

и решение краевой внешней задачи для нелинейного гиперболического уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x),\qquad t>0,\quad x\in\Omega',$$

$$U(0,x)=v_0,\qquad U(t,x)\Big|_{\Gamma}=v_1,\qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2,$$

где $\Gamma\bigcup\Omega'=\left\{x\in H\colon Q(x)\geq R^2\right\}$, а функция $Q(x)$ такая, что $\Delta_LQ(x)=\gamma$ $(\gamma>0,\mathrm{const.})$.

Заметим, что уравнения

$$\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_LU(t,x)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x)$$

совпадают лишь в случае, когда $\alpha(\xi) = 0$, а $k(\xi) = 1$, т. е. в случае волнового уравнения с лапласианом Леви $\dfrac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t,x) = 0$.

2. Предварительные сведения. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел П. Леви [5]. Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0, лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x_0)f_k, f_k)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H.

Приведем свойство лапласиана Леви (1), полученное в [5], которое понадобится в дальнейшем (см. также [6]).

Пусть функция

$$F(x) = f\big(V_1(x),\ldots,V_m(x)\big),$$

где $f(v_1,\ldots,v_m)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области значений $\big\{V_1(x),\ldots,V_m(x)\big\} \subset \mathbf{R}^m$. Пусть $V_k(x)$ — равномерно непрерывные, дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L V_k(x)$, $k = 1,\ldots,m$, существует. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial v_k}\bigg|_{v_k = V_k(x)}\Delta_L V_k(x). \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{C}$ шиловский класс функций — совокупность функций вида

$$F(x) = f\left((a_1,x)_H,\ldots,(a_m,x)_H,\frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где $a_1,\ldots,a_m$ — некоторые элементы пространства H, $f(\xi_1,\ldots,\xi_m,\zeta)$ — функция $m+1$ переменной, определенная и непрерывная в области пространства $\mathbf{R}^{m+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{C}^*$ подмножество функций из $\mathfrak{C}$, дважды непрерывно дифференцируемых по аргументу $\dfrac{\|x\|_H^2}{2}$. Тогда для $F(x) \in \mathfrak{C}^*$ имеет место формула [7]

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f((a_1,x)_H,\ldots,(a_m,x)_H,\zeta)}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta = \frac{\|x\|_H^2}{2}}.$$

Лапласиан Леви в шиловском классе функций не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^\infty$ в пространстве H.

Обозначим через Ω ограниченную область в гильбертовом пространстве H (т. е. ограниченное открытое множество в H), через $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ область в пространстве H с границей Γ.

Определим область Ω и поверхность Γ следующим образом:

$$\Omega = \left\{x \in H \colon 0 \le Q(x) < R^2\right\}, \qquad \Gamma = \left\{x \in H \colon Q(x) = R^2\right\},$$

где $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая неотрицательная функция такая, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$, γ — постоянное положительное число. Такие области и поверхности называют фундаментальными.

Пусть также $\lim_{\|x\|_H \to \infty} Q(x) = \infty$.

Обозначим через Ω' множество точек $x \in H$, внешних по отношению к $\overline{\Omega}$:

$$\Omega' = \left\{x \in H \colon Q(x) > R^2\right\}.$$

Примеры:

1. Шар $\overline{\Omega} = \left\{x \in H \colon \|x\|_H^2 \le R^2\right\}$,

$$\Omega' = \left\{x \in H \colon \|x\|_H^2 > R^2\right\}, \qquad \Gamma = \left\{x \in H \colon \|x\|_H^2 = R^2\right\}.$$

2. Эллипсоид $\overline{\Omega} = \left\{x \in H \colon (Bx, x)_H \le R^2\right\}$, где $B = \gamma E + A$, E — единичный оператор, а A — вполне непрерывный оператор в $H (\gamma > 0, \mathrm{const.})$,

$$\Omega' = \left\{x \in H \colon (Bx, x)_H > R^2\right\}, \qquad \Gamma = \left\{x \in H \colon (Bx, x)_H = R^2\right\}.$$

Введем функцию

$$S(x) = \frac{Q(x) - R^2}{\gamma}. \tag{3}$$

Функция $S(x)$ имеет такие свойства: $S(x) > 0$ при $x \in \Omega'$, $S(x) = 0$ при $x \in \Gamma$, $\Delta_L S(x) = 1$.

3. Краевая задача. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t,x)) \left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in H, \tag{4}$$

$$U(0,x) = u_0, \tag{5}$$

$$U(t,0) = u_1, \tag{6}$$

где $\alpha(\xi)$ — заданная функция на $\mathbf{R}^1$, числа u_0, u_1 заданы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha(\xi)$ — непрерывная функция и $\alpha(\xi) \in L_1(\mathbf{R}^1)$.*

Тогда решение задачи (4)–(6) (*в неявном виде*) *дается формулой*

$$\int\limits_{u_0}^{U(t,x)} e^{\int_{u_0}^{s} \alpha(\xi) d\xi} ds \left[\int\limits_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^{s} \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-p^2} dp. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцируя формулу (7) по t, имеем

$$e^{\int_{u_0}^{U(t,x)} \alpha(\xi) d\xi} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} \left[\int\limits_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^{s} \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\frac{4\|x\|_H^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}}, \tag{8}$$

$$e^{\int_{u_0}^{U(t,x)}\alpha(\xi)d\xi}\left\{\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2+\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}\right\}\left[\int\limits_{u_0}^{u_1}e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)d\xi}ds\right]^{-1}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t}{4\left(\frac{\|x\|_H^2}{2}\right)^{3/2}}e^{-t^2/\frac{4\|x\|_H^2}{2}}. \tag{9}$$

Из (7), используя формулу (2) при $m=1$, получаем

$$e^{\int_{u_0}^{U(t,x)}\alpha(\xi)d\xi}\Delta_L U(t,x)\left[\int\limits_{u_0}^{u_1}e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)d\xi}ds\right]^{-1}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t}{4\left(\frac{\|x\|_H^2}{2}\right)^{3/2}}e^{-t^2/\frac{4\|x\|_H^2}{2}}, \tag{10}$$

поскольку

$$\Delta_L\left(\int\limits_{u_0}^{U(t,x)}e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)d\xi}ds\right)=e^{\int_{u_0}^{U(t,x)}\alpha(\xi)d\xi}\Delta_L U(t,x),$$

а

$$\Delta_L\left(\frac{\|x\|_H^2}{2}\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_H^2}{2}\right)^{-3/2}\Delta_L\frac{\|x\|_H^2}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_H^2}{2}\right)^{-3/2}$$

$\left(\text{так как } \Delta_L\frac{\|x\|_H^2}{2}=1\right)$.

Правая часть выражения (9) равна правой части выражения (10). Поэтому равны и их левые части. Приравняв их и сократив на $e^{\int_{u_0}^{U(t,x)}\alpha(\xi)d\xi}\left[\int_{u_0}^{u_1}e^{\int_{u_0}^{s}\alpha(\xi)d\xi}ds\right]^{-1}$, получим тождество

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}+\alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2=\Delta_L U(t,x).$$

Полагая в (7) $t=0$, получаем $U(0,x)=u_0$, а полагая $x=0$, имеем $U(t,0)=u_1$.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Для волнового уравнения с лапласианом Леви (т. е. при $\alpha(\xi)=0$) из (7) следует, что решение задачи*

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}-\Delta_L U(t,x)=0,\qquad t>0,\quad x\in H,$$

$$U(0,x)=u_0,\qquad U(t,0)=u_1,$$

имеет вид

$$U(t,x)=(u_1-u_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}}e^{-p^2}dp+u_0.$$

Действительно, в случае $\alpha(\xi) = 0$ согласно формуле (7) имеем

$$\frac{U(t,x) - u_0}{u_1 - u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-p^2} dp.$$

4. Краевая внешняя задача. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t,x)) \left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega', \tag{11}$$

$$U(0,x) = v_0, \tag{12}$$

$$U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1, \tag{13}$$

$$\lim_{\|x\|\|_H \to \infty} U(t,x) = v_2, \tag{14}$$

где $\alpha(\xi)$ — заданная функция на $\mathbf{R}^1$, числа v_0, v_1 заданы ($v_2 = v_0$). Здесь $\Gamma \bigcup \Omega' = \{x \in \in H \colon Q(x) \geq R^2\}$, $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая функция такая, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$ ($\gamma > 0, \mathrm{const.}$).

Теорема 2. *Пусть* $\alpha(\xi)$ *— непрерывная функция и* $\alpha(\xi) \in L_1(\mathbf{R}^1)$.

Тогда решение задачи (11) – (14) (*в неявном виде*) *дается формулой*

$$\int\limits_{v_0}^{U(t,x)} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds \left[\int\limits_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/(2\sqrt{S(x)})} e^{-p^2} dp, \tag{15}$$

где $S(x) = \dfrac{Q(x) - R^2}{\gamma}$.

Доказательство. Из формулы (15), дифференцируя по t, получаем

$$e^{\int_{v_0}^{U(t,x)} \alpha(\xi) d\xi} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} \left[\int\limits_{v_0}^{v_1} e^{\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4S(x)}} \frac{1}{2\sqrt{S(x)}}, \tag{16}$$

$$e^{\int_{v_0}^{U(t,x)} \alpha(\xi) d\xi} \left\{\alpha(U(t,x)) \left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 + \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}\right\} \left[\int\limits_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{t}{4(S(x))^{3/2}} e^{-\frac{t^2}{4S(x)}}. \tag{17}$$

Из (15), используя формулу (2) при $m = 1$, имеем

$$e^{\int_{v_0}^{U(t,x)} \alpha(\xi) d\xi} \Delta_L U(t,x) \left[\int\limits_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds\right]^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{t}{4(S(x))^{3/2}} e^{-\frac{t^2}{4S(x)}}, \tag{18}$$

поскольку $\Delta_L(S(x))^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}(S(x))^{-3/2}\Delta_L S(x) = -\dfrac{1}{2}(S(x))^{-3/2}$ $\left(\Delta_L S(x) = \dfrac{\Delta_L Q(x)}{\gamma} = 1\right.$ согласно (3)$\Big)$.

Правая часть выражения (17) равна правой части выражения (18). Поэтому равны и их левые части. Приравняв их и сократив на $e^{\int_{v_0}^{U(t,x)}\alpha(\xi)d\xi}\left[\int_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^{s}\alpha(\xi)d\xi}ds\right]^{-1}$, получим тождество

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t,x))\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x).$$

Полагая в (15) $t = 0$, получаем $U(0,x) = v_0$.

На поверхности Γ $S(x) = 0$ и из (15) имеем $U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1$.

Из (15) следует, что $\lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_0$.

Наконец заметим, что в случае, когда $\overline{\Omega}$ — шар, $\Gamma\bigcup\Omega' = \left\{x\in H\colon \|x\|_H^2 \geq R^2\right\}$, а $S(x) = \dfrac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}$.

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 2.** *При* $\alpha(\xi) = 0$, *т. е. для волнового уравнения с лапласианом Леви, из* (15) *следует, что решение задачи*

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t,x) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0,x) = v_0, \qquad U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1, \qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_0,$$

имеет вид

$$U(t,x) = (v_1 - v_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t/(2\sqrt{S(x)})} e^{-p^2}dp + v_0,$$

где $S(x) = \dfrac{Q(x) - R^2}{\gamma}$.

Действительно, при $\alpha(\xi) = 0$ согласно формуле (15) имеем

$$\frac{U(t,x) - v_0}{v_1 - v_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t/(2\sqrt{S(x)})} e^{-p^2}dp.$$

Приведем примеры решения некоторых краевых задач.

***Пример* 1.** Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} + \frac{1}{U(t,x)}\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in H,$$

$$U(0,x) = u_0, \qquad U(t,0) = u_1, \quad u_0, u_1 > 0.$$

Согласно формуле (7) решение запишется в виде

$$\int\limits_{u_0}^{U(t,x)} e^{\int_{u_0}^{s}\frac{d\xi}{\xi}} ds \left[\int\limits_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^{s}\frac{d\xi}{\xi}} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-p^2} dp.$$

Поскольку

$$\int\limits_{u_0}^{U(t,x)} e^{\int_{u_0}^{s}\frac{d\xi}{\xi}} ds = \frac{1}{2u_0}(U^2(t,x) - u_0^2), \qquad \text{а} \qquad \int\limits_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^{s}\frac{d\xi}{\xi}} ds = \frac{1}{2u_0}(u_1^2 - u_0^2),$$

то

$$\frac{U^2(t,x) - u_0^2}{u_1^2 - u_0^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-p^2} dp.$$

Отсюда

$$U^2(t,x) = (u_1^2 - u_0^2)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-p^2} dp + u_0^2.$$

***Пример* 2.** Рассмотрим краевую внешнюю задачу

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - 2U(t,x)\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0,x) = v_0, \qquad U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1, \qquad \lim_{\|x\|_H \to \infty} U(t,x) = v_0,$$

где $\Gamma \bigcup \Omega' = \left\{x \in H\colon \|x\|_H^2 \geq R^2\right\}$.

Согласно формуле (15) решение запишется в виде

$$\int\limits_{v_0}^{U(t,x)} e^{-\int_{v_0}^{s} 2\xi d\xi} ds \left[\int\limits_{v_0}^{v_1} e^{-\int_{u_0}^{s} 2\xi d\xi} ds\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}}} e^{-p^2} dp.$$

Отсюда

$$\int\limits_{v_0}^{U(t,x)} e^{-s^2} ds = \int\limits_{v_0}^{v_1} e^{-s^2} ds \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}}} e^{-p^2} dp,$$

т. е.

$$\Phi(U(t,x)) = [\Phi(v_1) - \Phi(v_0)]\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{\dfrac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}}}\right) + \Phi(v_0),$$

где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-z^2}dz$ — интеграл вероятности.

1. *Феллер М. Н.* Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1564 – 1574.
2. *Albeverio S., Belopolskaya Ya. I., Feller M. N.* Boundary problems for the wave equation with the Lévy Laplacian in Shilov's class // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 3. – P. 197 – 202.
3. *Альбеверио С. А., Белопольская Я. И., Феллер М. Н.* Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви // Мат. заметки. – 2010. – **87**, вып. 6. – С. 803 – 813.
4. *Феллер М. Н.* Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 237 – 244.
5. *Lévy P.* Problémes concrets d'analyse fonctionnelle. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 510 p.
6. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
7. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, № 2. – С. 81 – 90.

Получено 18.06.12