УДК 517.925.44

В. М. Евтухов, А. М. Клопот (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Existence conditions and asymptotic (as $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$) representations are obtained for one class of monotone solutions of an nth-order differential equation whose right-hand side contains a sum of terms with regularly varying nonlinearities.

Встановлено умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення одного класу монотонних розв'язків диференціального рівняння n-го порядку, що містить у правій частині суму доданків із правильно змінними нелінійностями.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \tag{1.1}$$

где $n \ge 2$, $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $p_k \colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, — непрерывные функции, φ_{kj}: $\triangle_{Y_j} \longrightarrow$ $\longrightarrow]\,0, +\infty\,[$, $k = \overline{1, m}$; $j = \overline{0, n-1}$, — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функции порядков σ_{kj}, $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], $\triangle_{Y_j}$ — односторонняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Согласно определению правильно меняющейся функции (см. [1, с. 9, 10], гл. 1, п. 1.1) имеют место представления

$$\varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right) = \left|y^{(j)}\right|^{\sigma_{kj}} L_{kj}\left(y^{(j)}\right), \qquad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{1.2}$$

где $L_{kj} \colon \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывные и медленно меняющиеся при $y^j \to Y_j$ функции, т. е. такие, для которых при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}\left(\lambda y^{(j)}\right)}{L_{kj}\left(y^{(j)}\right)} = 1, \qquad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{1.3}$$

Кроме того, известно (см. [1, с. 10–15], гл. 1, п. 1.2), что предельные соотношения (1.3) выполняются равномерно по λ на любом промежутке $[c, d\,] \subset]\,0, +\infty\,[$ (свойство M_1) и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции L_{0kj}: $\Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2) такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}\left(y^{(j)}\right)}{L_{0kj}\left(y^{(j)}\right)} = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0kj}\left(y^{(j)}\right)}{L_{0kj}\left(y^{(j)}\right)} = 0, \qquad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{1.4}$$

В силу (1.2) и указанных свойств медленно меняющихся функций дифференциальное уравнение (1.1) является асимптотически близким при $y^{(j)} \to Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$, к уравнению со степенными нелинейностями

[1] Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}}.$$

В этом уравнении нелинейности $|y^{(j)}|^{\sigma_{kj}}$ являются правильно меняющимися функциями как при $y^{(j)} \to 0$, так и при $y^{(j)} \to \pm\infty$. Асимптотическое поведение решений этого уравнения исследовано в работах [2 – 7].

В настоящей статье, отказываясь от предположения, что функции $\varphi_{kj}(y^{(j)})$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, n-1}$, являются степенными, предполагаем, что они близки к степенным в окрестностях точек Y_j в смысле определения правильно меняющихся функций. При таких нелинейностях асимптотика решений исследовалась (см. работы [8 – 18]) лишь для следующих трех частных случаев уравнения (1.1):

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \qquad y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y'), \qquad y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)\varphi_{k0}(y)\varphi_{k1}(y'),$$

причем для двух последних из этих уравнений при более жестких, чем в (1.1), исходных ограничениях на коэффициенты и нелинейности.

Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le$ $\le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \qquad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0. \tag{1.6}$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1) в особых случаях, когда $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$, а также асимптотики при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t). \tag{1.7}$$

В силу результатов из [19] изучаемые решения уравнения (1.1) имеют следующие априорные асимптотические свойства.

Лемма 1.1. *Пусть* $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ *— произвольное* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*-решение уравнения* (1.1). *Тогда*:

1) *если* $\lambda_0 = 1$, *то*

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \ldots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty; \tag{1.8}$$

2) *если* $\lambda_0 = \pm\infty$, *то имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические соотношения*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n-1)}(t), \quad k = 1, \ldots, n-1, \qquad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \tag{1.9}$$

2. Формулировка основных результатов. Чтобы сформулировать установленные для уравнения (1.1) теоремы, введем некоторые вспомогательные обозначения и одно определение.

Выберем числа $b_j \in \Delta_{Y_j}$, $j = \overline{0, n-1}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$|b_j| < 1 \quad \text{при} \quad Y_j = 0, \qquad b_j > 1 \ (b_j < -1) \quad \text{при} \quad Y_j = +\infty \ (Y_j = -\infty), \tag{2.1}$$

и положим

$$\Delta_{Y_j}(b_j) = \begin{cases} [b_j, Y_j[, & \text{если } \ \Delta_{Y_j} \ \text{— левая окрестность } \ Y_j, \\ ]Y_j, b_j], & \text{если } \ \Delta_{Y_j} \ \text{— правая окрестность } \ Y_j, \end{cases} \qquad j = \overline{0, n-1}. \tag{2.2}$$

Из определения $\mathrm{P}_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения уравнения (1.1) ясно, что каждое такое решение и все его производные до порядка n включительно отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем на этом промежутке $(j+1)$-я $(j \in \{0, \ldots, n-1\})$ производная данного решения положительна, если Δ_{Y_j} — левая окрестность Y_j, и отрицательна — в противном случае. Учитывая этот факт и выбор b_j, вводим числа

$$\nu_{0j} = \operatorname{sign} b_j, \qquad \nu_{1j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \Delta_{Y_j} \ \text{— левая окрестность } \ Y_j, \\ -1, & \text{если } \ \Delta_{Y_j} \ \text{— правая окрестность } \ Y_j, \end{cases} \qquad j = \overline{0, n-1}, \tag{2.3}$$

определяющие соответственно знаки j- и $(j+1)$-й производных $\mathrm{P}_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения. При этом заметим, что для $\mathrm{P}_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения уравнения (1.1) выполняются условия

$$\nu_{0j}\nu_{1j} < 0, \quad \text{если} \quad Y_j = 0, \qquad \nu_{0j}\nu_{1j} > 0, \quad \text{если} \quad Y_j = \pm\infty, \qquad j = \overline{0, n-1}. \tag{2.4}$$

Далее, введем вспомогательные обозначения, положив

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj}, \qquad \mu_{kn} = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{kj}(n-j-1), \quad k = \overline{1, m},$$

$$J_{k0}(t) = \int_{A_{k0}}^{t} p_k(s)\,ds, \qquad J_{k00}(t) = \int_{A_{k00}}^{t} J_{k0}(s)\,ds, \quad k = \overline{1, m},$$

$$J_{kn}(t) = \int_{A_{kn}}^{t} p_k(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_{kn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{kj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds, \quad k = \overline{1, m},$$

где каждый из пределов интегрирования A_{km}, A_{kmm}, $m \in \{0, 1\}$, выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т. е. при $t \in [a_0, \omega[$, подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω, если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $z \to Z_0$ функция L : $\Delta_{Z_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, где Z_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_{Z_0} — односторонняя окрестность Z_0, удовлетворяет условию S_0, если*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|z|}\right) = L(z)[1+o(1)] \qquad \text{\textit{при}} \quad z \to Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}),$$

где $\nu = \operatorname{sign} z$.

***Замечание* 2.1.** Если медленно меняющаяся при $z \to Z_0$ функция $L\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, то для любой медленно меняющейся при $z \to Z_0$ функции l: $\Delta_{Z_0} \longrightarrow]0, +\infty[$

$$L(zl(z)) = L(z)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad z \to Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}).$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы о представлении (см. [1, с. 10], гл. 1, § 1.2) медленно меняющейся функции l и свойства M_1 функции L.

***Замечание* 2.2** (см. [12]). Если медленно меняющаяся при $z \to Z_0$ функция $L\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, а функция $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ непрерывно дифференцируема и такая, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\,[r+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L(y(t)) = L\left(\nu|\xi(t)|^r\right)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $\nu = \operatorname{sign} y(t)$ в левой окрестности ω.

***Замечание* 2.3.** Если медленно меняющаяся при $z \to Z_0$ функция $L\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0, а функция $r\colon \Delta_{Z_0} \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, где K — компакт в $\mathbb{R}^m$, такова, что

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} r(z,v) = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{L\left(\nu e^{[1+r(z,v)]\ln|z|}\right)}{L(z)} = 1 \qquad \text{равномерно по} \quad v \in K, \qquad \text{где} \quad \nu = \operatorname{sign} z.$$

В самом деле, если бы это было не так, то существовали бы последовательность $\{v_n\} \in K$ и последовательность $\{z_n\} \in \Delta_{Z_0}$, сходящаяся к Z_0, такие, что выполнялось бы неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty}\left|\frac{L\left(\nu e^{[1+r(z_n,v_n)]\ln|z_n|}\right)}{L(z_n)} - 1\right| > 0.$$

При этом ясно, что существует функция $v\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow K$ такая, что $v(z_n) = v_n$. Для этой функции, очевидно, $\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} r(z, v(z)) = 0$ и поэтому

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{L\left(\nu e^{[1+r(z,v(z))]\ln|z|}\right)}{L(z)} = 1,$$

что противоречит приведенному выше неравенству.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ выполняется неравенство $\gamma_s \neq 0$ и существует непрерывная функция $b_s \colon [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что*

$$\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t) b_s(t)| = +\infty \qquad \text{и} \qquad \limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_s \int_a^t b_s(\tau)\, d\tau} < \beta_s(\gamma_k - \gamma_s) \tag{2.5}$$

$$\text{при всех} \quad k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\},$$

где $\beta_s = \operatorname{sign} b_s(t)$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$-решений дифференциального уравнения (1.1), *для которых*

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim b_s(t) \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.6}$$

необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение

$$(1 + \rho)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{sj} (1 + \rho)^j \tag{2.7}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\begin{gathered} b_s(t) \sim \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)}, \qquad \frac{p_s(t)}{J_{s0}(t)} \sim \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \\ \nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

выполнялись неравенства (2.4) *и неравенства*

$$\alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) > 0, \qquad \nu_{0j} \nu_{0n-1} \left(\gamma_s J_{s0}(t)\right)^{n-j-1} > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \qquad \text{при} \quad t \in\,]a, \omega[. \tag{2.9}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = \overline{0, n-2}, \tag{2.10}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{so0}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) \left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s00}(t)}\right|^{\mu_{sn}} [1 + o(1)], \tag{2.11}$$

причем решений с такими представлениями существует l-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.7) *имеется l корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку $\alpha_s \nu_{0n-1}$.*

***Замечание* 2.4.** Алгебраическое уравнение (2.7) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_{sj}| < |1 - \sigma_{sn-1}|$.

***Замечание* 2.5.** В силу второго из условий (2.8) и свойства M_1 медленно меняющихся функций в представлениях (2.10) и (2.11) отношение $\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}$ может быть заменено на $\dfrac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)}$.

***Замечание* 2.6.** Из второго условия в (2.8) также следует, что функции J_{s0}, J_{s00} являются (см. [1]) быстро меняющимися при $t \uparrow \omega$ и имеет место соотношение

$$\ln p_s(t) \sim \ln |J_{s0}(t)| \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому функция p_s не может быть правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$.

В теореме 2.1 асимптотические представления для $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решений уравнения (1.1) даются в неявном виде. Частично данную проблему решает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *и медленно меняющиеся функции* L_{sj}, $j = \overline{0, n-1}$, *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда для каждого* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$*-решения со свойством* (2.6) *уравнения* (1.1) *имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t) \sim \nu_{0n-1} \left(\frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)} \right)^{n-j-1} \left| \gamma_s J_{s0}(t) \left| \frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)} \right|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-1} L_{sj} \left(\nu_{0j} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} \right) \right|^{1/\gamma_s}, \tag{2.12}$$

$$j = \overline{0, n-1}.$$

Для $P_\omega \left(Y_1, \ldots, y_{n-1}, \pm\infty \right)$-решений уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.3. *Пусть для некоторого* $s \in \{1, \ldots, m\}$ *выполняются неравенство* $\gamma_s \neq 0$, *условия*

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \textit{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\} \tag{2.13}$$

и медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ *функции* L_{sj}, $j = \overline{0, n-2}$, *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда для существования* $P_\omega \left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty \right)$*-решений уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства* (2.4), *неравенства*

$$\nu_{0j} \nu_{0n-1} \pi_\omega^{n-j-1}(t) > 0, \quad j = \overline{0, n-2}, \qquad \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{sn}(t) > 0 \tag{2.14}$$

в некоторой левой окрестности ω *и условия*

$$\nu_{0j} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-2}, \qquad \nu_{0n-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_{n-1},$$
$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = 0. \tag{2.15}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(j-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!}\, y^{(n-1)}(t)[1+o(1)], \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{2.16}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{sn-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.17}$$

причем таких решений в случае, когда $\omega = +\infty$, *существует* n*-параметрическое семейство, если* $J_{sn}(t) > 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *и* $(n-1)$*-параметрическое семейство, если* $J_{sn}(t) < 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *а в случае, когда* $\omega < +\infty$ *и* $J_{sn}(t) > 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *существует однопараметрическое семейство таких решений.*

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.3 *и медленно меняющиеся при* $y^{(n-1)} \to Y_{n-1}$ *функции* L_{sn-1} *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда для каждого* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$*-решения уравнения* (1.1) *имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (2.16) *и*

$$y^{(n-1)}(t) =$$

$$= \nu_{0n-1} \left| \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t) L_{sn-1}\left(\nu_{0n-1} |J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s} \right) \right|^{1/\gamma_s} [1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.18}$$

3. Доказательства теорем. ***Доказательство теоремы* 2.1.** *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решение уравнения (1.1), для которого имеет место асимптотическое соотношение (2.6). Тогда существует $t_1 \in [a, \omega[$ такое, что $y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j = \overline{0, n-1}$, при $t \in [t_1, \omega[$, выполняются неравенства (2.4) и в силу леммы 1.1, а также первого из условий (2.5)

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \sim b_s(t) \qquad \text{при} \quad k = \overline{1, n} \qquad \text{и} \qquad \beta\beta_s \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = +\infty. \tag{3.1}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\ln |y^{(k-1)}(t)| \sim \int_a^t b_s(\tau)\, d\tau \to \pm\infty, \quad k = \overline{1, n}, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.2}$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, представления (1.2) и условия

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{y_j}}} \frac{\ln L_{kj}(y^{(j)})}{\ln |y^{(j)}|} = 0, \qquad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{3.3}$$

которые выполняются в силу свойств медленно меняющихся функций (см. [1, с. 24], гл. 1, п. 1.5), находим

$$\ln \varphi_{kj}\left(y^{(j)}(t) \right) = \sigma_{kj} \ln |y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj}(y^{(j)}(t)) = [\sigma_{kj} + o(1)] \ln |y^{(j)}(t)| =$$

$$= [\sigma_{kj} + o(1)] \int\limits_a^t b_s(\tau)\, d\tau, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому для любого $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$

$$\ln \left[\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} \right] = \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\ln \varphi_{kj}(y^{j)}(t) - \ln \varphi_{sj}(y^{(j)}(t) \right] =$$

$$= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \int\limits_a^t b_s(\tau)\, d\tau \sum_{j=0}^{n-1} [\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)] =$$

$$= \left| \int\limits_a^t b_s(\tau)\, d\tau \right| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_s \int_a^t b_s(\tau)\, d\tau} + \beta_s(\gamma_s - \gamma_k) + o(1) \right] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу (3.2) и (2.5) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \qquad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}. \tag{3.4}$$

Тогда из (1.1) следует, что для данного решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_s p_s(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t)) \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.5}$$

Согласно (1.2) и свойству M_2 медленно меняющихся функций существуют непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции $\varphi_{0sj} \colon \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ порядков σ_{sj}, $j = \overline{0, n-1}$, такие, что

$$\varphi_{sj}(y^{(j)}) \sim \varphi_{0sj}(y^{(j)}) \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y(j) \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} \varphi'_{0sj}(y^{(j)})}{\varphi_{0sj}(y^{(j)})} = \sigma_{sj}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{3.6}$$

В силу (3.6) и (3.1)

$$\left(\frac{y^{(k-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right)' =$$

$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \left[1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(k-1)}(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(k)}(t) y^{(j)}(t)} \frac{y^{(j)}(t) \varphi'_{0sj}(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right] =$$

$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))}[\gamma_s + o(1)], \quad k = 1, \ldots, n, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.7}$$

Отсюда при $k = n$ следует, что (3.5) может быть представлено в виде

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right)' = \alpha_s \gamma_s p_s(t)[1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = C + \alpha_s \gamma_s J_{s0}(t)[1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции J_{s0} предел интегрирования $A_{s0} = a$, $J_{s0}(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = \alpha_s \gamma_s J_{s0}(t)[1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.8}$$

Покажем, что в случае $A_{s0} = \omega$, когда $J_{s0}(t) \to 0$ при $t \uparrow \omega$, постоянная $C = 0$. Предположим противное, т. е. что в этом случае $C \neq 0$. Тогда

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = C + o(1) \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

но это невозможно, так как

$$\ln \left| \frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} \right| = \int\limits_a^t b_s(\tau)\, d\tau [\gamma_s + o(1)] \to \pm\infty \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Значит, при $A_{s0} = \omega$ также имеет место представление (3.8).

Аналогично из (3.8) с использованием (3.7) при $k = n - 1$ получим

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0sj}(y^{(j)}(t))} = \alpha_s \gamma_s^2 J_{s00}(t)[1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.9}$$

Из (3.5), (3.8) и (3.9) с учетом (3.6) имеем

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{p_s(t)}{\gamma_s J_{s0}(t)}[1 + o(1)], \qquad \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} = \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)}[1 + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу (1.8) и (2.6) выполняются условия (2.8) и согласно тождествам

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t), \qquad j = \overline{0, n-2},$$

имеют место асимптотические представления (2.10). Кроме того, из (3.8) и (2.10) следует, что выполняются неравенства (2.9).

Используя теперь приведенные выше тождества, представления (2.10) и свойство M_1 медленно меняющихся при $y^{(j)} \to Y_j$ функций $L_{0sj}(y^{(j)}) = \dfrac{\varphi_{0sj}(y^{(j)})}{|y^{(j)}|^{\sigma_{sj}}}$, $j = \overline{0, n-1}$, находим

$$\varphi_{0sj}(y^{(j)}(t)) = |y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}(y^{(j)}(t)) \sim$$

$$\sim \left|\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)]\right) \sim$$

$$\sim \left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{(n-j-1)\sigma_{sj}} \left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_{sj}} L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right),$$

$$j = \overline{0, n-1}, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этих соотношений из (3.8) получаем представление

$$\frac{|y^{n-1}(t)|^{\gamma_s} \left|\dfrac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)}\right|^{\mu_{sn}}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого с учетом первых из соотношений (1.4) следует представление (2.11).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.4), (2.6), (2.8), (2.9) и алгебраическое уравнение (2.7) не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда в силу условий (2.5), (2.8) и (2.9) также выполняются неравенства

$$\limsup_{t\uparrow\omega} \frac{\gamma_s\,[\ln p_k(t) - \ln p_s(t)]}{\alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s0}(t)|} < \alpha_s \nu_{0n-1}(\gamma_k - \gamma_s) \qquad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}. \tag{3.10}$$

Покажем, что в данном случае существуют $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решения уравнения (1.1), допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10), (2.11), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y\right)} = Q_s(t)(1+v_n), \tag{3.11}$$

где $L_{0sj}\colon \Delta_{Y_j}(b_j) \longrightarrow]0, +\infty[$, $j = \overline{0, n-1}$, — непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j$ функции, удовлетворяющие условиям (1.4) (при $k = s$), существующие в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций, и

$$Q_s(t) = \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s J_{s0}(t) \left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{\mu_{sn}}.$$

Положим

$$d = \frac{1}{2|\gamma_s|}, \qquad \mathbb{R}_d = \{z \in \mathbb{R}\colon\ |z| \le d\}, \qquad \mathbb{R}_{1/2} = \left\{v_n \in \mathbb{R}\colon\ |v_n| \le \frac{1}{2}\right\}$$

и покажем, что соотношение (3.11) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0, \omega[\times\mathbb{R}_{1/2}$, $t_0 \in [a, \omega[$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{0n-1}\, |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z(t,v_n)}\,, \tag{3.12}$$

где функция z такова, что

$$\begin{gathered} |z(t, v_n)| \le d \qquad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times\mathbb{R}_{1/2}, \\ \lim_{t\uparrow\omega} z(t, v_n) = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{1/2}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Полагая в (3.11)

$$Y = \nu_{0n-1}\, |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} \tag{3.14}$$

и затем логарифмируя полученное при этом соотношение, после элементарных преобразований находим

$$z = a(t) + b(t, v_n) + Z(t, z), \tag{3.15}$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\gamma_s}\left(\frac{\ln Q_s(t)}{\ln|J_{s0}(t)|} - 1\right), \qquad b(t, v_n) = \frac{\ln(1 + v_n)}{\gamma_s \ln|J_{s0}(t)|},$$

$$Z(t, z) = \frac{1}{\gamma_s \ln|J_{s0}(t)|}\sum_{j=0}^{n-1} \ln L_{0s}\left(\nu_{0n-1}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z}\right).$$

В силу последних из неравенств (2.9), а также второго и третьего из условий (2.8)

$$\nu_{0n-1} \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} = \nu_{0j} \lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{n-j-1} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s + z} =$$

$$= \nu_{0j} \lim_{t\uparrow\omega} \exp\left(\ln|J_{s0}(t)| \left[\frac{1}{\gamma_s} + z + (n - j - 1)\left(\frac{\ln|\gamma_s J_{s00}(t)|}{\ln|J_{s0}(t)|} - 1\right)\right]\right) =$$

$$= \nu_{0j} \lim_{t\uparrow\omega} \exp\left(\ln|J_{s0}(t)| \left[\frac{1}{\gamma_s} + z + o(1)\right]\right) = \nu_{0j} \lim_{t\uparrow\omega} |J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s} = Y_j,$$

$$j = \overline{0, n-1}, \qquad \text{при} \quad |z| \le d.$$

Поэтому правая часть в (3.15) непрерывно дифференцируема на множестве $[t_1, \omega[\times\mathbb{R}_{1/2} \times \mathbb{R}_d$, где t_1 — некоторое число из промежутка $[a, \omega[$.

Кроме того, в силу второго и третьего из условий (2.8), а также вторых из условий (1.4) и условий (3.3) (при $k = s$) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} b(t, v_n) = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{1/2}, \tag{3.16}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad z \in \mathbb{R}_d. \tag{3.17}$$

Согласно этим условиям существует число $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2} \times \mathbb{R}_d$ выполняются неравенство

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t, z)| \le d \tag{3.18}$$

и условие Липшица

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \qquad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[\qquad \text{и} \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{R}_d. \tag{3.19}$$

Подобрав таким образом число t_2, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$ функций $z \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\| = \sup\big\{|z(t, v_n)| \colon (t, v_n) \in \Omega\big\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\| \le d$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, оператор

$$\Phi(z)(t, v_n) = z(t, v_n) - \nu\left[z(t, v_n) - a(t) - b(t, v_n) - Z(t, z(t, v_n))\right]. \tag{3.20}$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условия (3.18) имеем

$$|\Phi(z)(t, v_n)| \le (1 - \nu)|z(t, v_n)| + \nu d \le d \qquad \text{при} \quad (t, v_n) \in \Omega.$$

Следовательно, $\|\Phi(z)\| \le d$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (3.19) при $(t, v_n) \in \Omega$

$$|\Phi(z_1)(t, v_n) - \Phi(z_2)(t, v_n)| \le (1 - \nu)|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| + \nu|Z(t, z_1(t, v_n)) - Z(t, z_2(t, v_n)| \le$$

$$\le (1 - \nu)|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| + \frac{\nu}{2}|z_1(t, v_n) - z_2(t, v_n)| \le \Big(1 - \frac{\nu}{2}\Big)\|z_1 - z_2\|.$$

Отсюда следует, что $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \le \Big(1 - \frac{\nu}{2}\Big)\|z_1 - z_2\|$.

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (3.20) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (3.15), удовлетворяющим условию $\|z\| \le d$. Из (3.15) с учетом этого условия и (3.16), (3.17) следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{1/2}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_2, \omega[$, непосредственно следует из известной локальной теоремы о существовании неявной функци, определяемой соотношением (3.15). В силу замены (3.14) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{1/2}$ функция Y вида (3.12), которая является решением уравнения (3.11) и удовлетворяет условиям

$$\nu_{0j}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_j},\qquad j=\overline{0,n-1},\qquad \text{при}\quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2},$$

$$\nu_{0j}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)=Y_j,\qquad j=\overline{0,n-1},\qquad \text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{1/2}. \tag{3.21}$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1.1) преобразование

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}=\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}[1+v_{j+1}(\tau)],\quad j=\overline{0,n-1},$$
$$y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau)),\qquad \tau=\alpha_s\nu_{0n-1}\ln|J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s}, \tag{3.22}$$

и учитывая, что функция $y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n(\tau))$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $v_n(\tau)\in\mathbb{R}^{1/2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{\prod_{j=0}^{n-1}L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1}y^{(n-1)}(t)\right)}=Q_s(t)[1+v_n(\tau)],$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$v_i'=\alpha_s\nu_{0n-1}\Bigg(1+v_{i+1}-(n-j-1)\gamma_s[1-h(\tau)](1+v_i)-$$
$$-h(\tau)\frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}G(\tau,v_1,\ldots,v_n)\Bigg),\qquad i=\overline{1,n-2},$$

$$v_{n-1}'=\alpha_s\nu_{0n-1}\Bigg(1-\gamma_s[1-h(\tau)](1+v_{n-1})-$$
$$-h(\tau)\frac{(1+v_{n-1})\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}G(\tau,v_1,\ldots,v_n)\Bigg), \tag{3.23}$$

$$v_n'=\alpha_s\nu_{0n-1}\Bigg(\gamma_s h(\tau)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}G(\tau,v_1,\ldots,v_n)-$$
$$-H(\tau,v_1,\ldots,v_n)(1+v_n)-\gamma_s q(\tau)(1+v_n)\Bigg),$$

в которой

$$h(\tau(t)) = \frac{p_s(t)J_{s00}(t)}{J_{s0}^2(t)}, \qquad q(\tau) = h(\tau) + \mu_{sn}[1 - h(\tau)],$$

$$G(\tau(t), v_1, \ldots, v_n) = \frac{L_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1})\right)}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n))\right)} \times$$

$$\times \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{kj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1})\right)}{\alpha_s p_s(t) \varphi_{sn-1}(Y(t, v_n)) \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1})\right)},$$

$$H(\tau(t), v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n) L'_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n)\right)}{L_{0sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t, v_n)\right)} \times$$

$$\times \left(\gamma_s(n - j - 1)[1 - h(\tau(t))] + h(\tau) \frac{\prod_{j=0}^{n-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1 + v_n} G(\tau, v_1, \ldots, v_n)\right).$$

В силу (2.8) и (2.9) функция $\tau(t) = \alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s00}(t)|^{1/\gamma_s}$ имеет свойства

$$\tau'(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty$$

и существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что на множестве

$$[\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{1/2}, \qquad \text{где} \quad \tau_1 = \tau(t_1), \qquad \mathbb{R}^n_{1/2} = \left\{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \colon |v_i| \le \frac{1}{2}, \ \ i = \overline{1, n}\right\},$$

правые части системы уравнений (3.23) непрерывны. Согласно второму из условий (2.8)

$$\lim_{\tau \to +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h(\tau(t)) = 1, \qquad \lim_{\tau \to +\infty} q(\tau) = 1. \tag{3.24}$$

Далее, таким же образом, каким при доказательстве необходимости были установлены предельные соотношения (3.4), показываем с использованием условий (3.21) и неравенств (3.10), что вторая дробь в представлении функции G стремится к единице при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$. Кроме того, в силу условий (3.21), свойства M_1 медленно меняющихся функций, условий (1.4) и (3.24) равномерно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}$ первая дробь в представлении функции G стремится к единице и функция H стремится к нулю при $t \uparrow \omega$. Поэтому систему дифференциальных уравнений (3.23) можно записать в виде

$$v_i' = \alpha_s \nu_{0n-1}\left(f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) + 1 + v_{i+1} - \frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}\right), \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$v_{n-1}' = \alpha_s \nu_{0n-1}\left(f_{n-1}(\tau, v_1, \ldots, v_n) + 1 - \frac{(1+v_{n-1})\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n}\right),$$

$$v_n' = \alpha_s \nu_{0n-1}\left(f_n(\tau, v_1, \ldots, v_n) + \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s(1+v_n)\right),$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \qquad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{1/2}.$$

Выделяя теперь линейные части в слагаемых, стоящих после функций f_i, $i = \overline{1, n}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_i' = \alpha_s \nu_{0n-1}\left(f_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} v_k + V_i(v_1, \ldots, v_n)\right), \qquad i = \overline{1, n}, \tag{3.25}$$

в которой

$$p_{ii} = -1 - \sigma_{si-1}, \qquad p_{ii+1} = 1 - \sigma_{si}, \qquad p_{ik} = -\sigma_{sk-1}$$

$$\text{при} \quad k \neq i, i+1, n, \quad p_{in} = 1, \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$p_{n-1k} = -\sigma_{sk-1} \qquad \text{при} \quad k = \overline{1, n-2}, \qquad p_{n-1n-1} = -1 - \sigma_{sn-2}, \qquad p_{n-1n} = 1,$$

$$p_{nk} = \gamma_s \sigma_{sk-1} \qquad \text{при} \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad p_{nn} = -\gamma_s,$$

$$V_i(v_1, \ldots, v_n) = -\frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}}}{1+v_n} - v_n +$$

$$+(1+\sigma_{si-1})v_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} \sigma_{sk-1} v_k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$V_n(v_1, \ldots, v_n) = \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} - \gamma_s \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{sk-1} v_k.$$

Здесь

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_i(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_k} = 0, \quad i,\, k = \overline{1, n},$$

и характеристическое уравнение $\det[P - \rho E] = 0$, где $P = (p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ и E — единичная матрица размерности $n \times n$, имеет вид (2.7). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Тем самым показано, что для системы (3.25) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [20]. Согласно этой теореме данная система имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^{n}\colon [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_2 \geq \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений существует l-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.7) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\alpha_s \nu_{0n-1}$. Каждому такому решению в силу замены (3.22) и первых из условий (1.4) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_2 \in [a, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10) и (2.11). Используя эти представления, условия (2.8), (2.9) и (3.10), нетрудно проверить, что каждое такое решение уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решением.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.1.** Если во вторых из условий (2.5) хотя бы для одного $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$ имеет место противоположное неравенство с заменой в нем $\limsup$ на $\liminf$, то, как следует из доказательства необходимости, для этого k предел, стоящий в (3.4) слева, будет равен $+\infty$. Поэтому условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\gamma_s\,[\ln p_k(t) - \ln p_s(t)]}{\alpha_s \nu_{0n-1} \ln |J_{s0}(t)|} \leq \alpha_s \nu_{0n-1}(\gamma_k - \gamma_s) \qquad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\} \tag{3.26}$$

в случае существования (конечных или равных $\pm\infty$) пределов, стоящих слева, являются необходимыми для того, чтобы на каждом $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решении дифференциального уравнения (1.1) имело место соотношение (3.5), т. е. чтобы главным в правой части (1.1) было s-е слагаемое. В случае одного слагаемого $\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)})$, стоящего в правой части уравнения (1.1), теорема 2.1, очевидно, остается в силе без предположения о существовании функции $b_s\colon [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющей условиям (2.5), и без условий, где фигурирует эта функция.

***Доказательство теоремы* 2.2.** Пусть дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \ldots$ $\ldots, Y_{n-1}, 1)$-решение $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ со свойством (2.6). Тогда согласно теореме 2.1 выполняются условия (2.4), (2.8), (2.9) и это решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10), (2.11). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что выполняются условия (3.1). Поскольку функции L_{sj}, $j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условию S_0 и в силу (2.8) и (3.1)

$$\frac{\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)'}{\left(\left(\dfrac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)} = (n-j-1)\left[\frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} - \frac{p_s(t)}{J_{s0}(t)}\right] + \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} =$$

$$= (n-j-1)[1 - h(\tau(t))]\frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)} + \frac{J_{s0}(t)}{\gamma_s J_{s00}(t)}[1 + o(1)] = \frac{J_{s0}(t)}{J_{s00}(t)}\left[\frac{1}{\gamma_s} + o(1)\right],$$

согласно замечанию 2.2 имеют место представления

$$L_{sj}\left(\left(\frac{\gamma_s J_{s0}(t)}{p_s(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right) =$$

$$= L_{sj}\left(\nu_{0j}|J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s}\right)[1+o(1)], \quad j=\overline{0,n-1}, \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому из (2.11) имеем

$$\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s} = \alpha_s\nu_{0n-1}\gamma_s J_{s0}(t)[1+o(1)]\left|\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right|^{\mu_{sn}}\prod_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\nu_{0j}|J_{s0}(t)|^{1/\gamma_s}\right) \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом (2.8) – (2.10) следует, что имеют место асимптотические представления (2.12).

***Доказательство теоремы* 2.3.** *Необходимость.* Пусть y — произвольное $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},$ $\pm\infty)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда существует $t_1\in[a,\omega[$ такое, что $y^{(j)}(t)\in\Delta_{Y_j}(b_j)$, $j=\overline{0,n-1}$, при $t\in[t_1,\omega[$, выполняются неравенства (2.4) и в силу леммы 1.1 имеют место асимптотические соотношения (1.9). Из (1.9) непосредственно следуют асимптотические представления (2.16) и первые из знаковых условий (2.14). Кроме того, из (1.9) следует, что

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-1+o(1)}{\pi_\omega(t)}, \qquad j=\overline{0,n-1}, \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.27}$$

В силу этих соотношений

$$\ln|y^{(j)}(t)| = [n-j-1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|, \qquad j=\overline{0,n-1}, \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{3.28}$$

и поэтому выполняется первое из условий (2.15). При этом ясно, что существует число $a_0\in$ $\in[t_1,\omega[$ такое, что $\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\in\Delta_{Y_j}(b_j)$, $j=\overline{0,n-2}$, при $t\in[a_0,\omega[$.

Учитывая асимптотические соотношения (3.28), представления (1.2) и условия (3.3), находим

$$\ln\varphi_{kj}\left(y^{(j)}(t)\right) = \sigma_{kj}\ln|y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj}(y^{(j)}(t)) = [\sigma_{kj}+o(1)]\ln|y^{(j)}(t)| =$$

$$= [\sigma_{kj}+o(1)][n-j-1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)| =$$

$$= [(n-j-1)\sigma_{kj}+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|, \qquad k=\overline{1,m}, \quad j=\overline{0,n-1}, \qquad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому для любого $k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}$

$$\ln\left[\frac{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(y^{(j)}(t))}\right] = \ln\frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1}\left[\ln\varphi_{kj}(y^{j)}(t) - \ln\varphi_{sj}(y^{(j)}(t)\right] =$$

$$= \ln\frac{p_k(t)}{p_s(t)} - \ln|\pi_\omega(t)|\sum_{j=0}^{n-1}[(\sigma_{sj}-\sigma_{kj})(n-j-1)+o(1)] =$$

$$= \beta \ln |\pi_\omega(t)| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) + o(1) \right] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где число β определено в (1.7). Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу условий (2.13) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, выполняются условия (3.4) и поэтому имеет место асимптотическое соотношение (3.5).

Так как функции L_{sj}, $j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют условию S_0 и имеют место соотношения (3.27), согласно замечанию 2.2

$$L_{sj}(y^{(j)}(t)) = L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)], \qquad j = 0, \ldots, n-2, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Кроме того, в силу (1.9)

$$|y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} = \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} |\pi_\omega(t)|^{\sigma_{sj}(n-j-1)} \, |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_{sj}} [1+o(1)],$$

$$j = \overline{0, n-2}, \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (3.5) с учетом (1.2) получим при $t \uparrow \omega$ асимптотическое соотношение вида

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s - 1}}{L_{sn-1}(y^{(n-1)}(t))} =$$

$$= \alpha_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)]. \tag{3.29}$$

Заменяя здесь функцию L_{sn-1} функцией L_{0sn-1}, удовлетворяющей условиям (1.4) при $k = s$ и $j = n-1$, которая существует в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций, и замечая, что

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right)' = \frac{\nu_{0n-1} y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s - 1}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \left[\gamma_s - \frac{y^{(n-1)}(t) L'_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))}{L'_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right] =$$

$$= \frac{\nu_{0n-1} y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s - 1}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} [\gamma_s + o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

имеем

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} \right)' =$$

$$= \alpha_s \nu_{0n-1} \gamma_s \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_{sj}} p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}} \prod_{j=0}^{n-2} L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)],$$

откуда после интегрирования на промежутке от a_0 до t и использования первого из условий (1.4) (при $k = s$ и $j = n-1$) получаем с учетом второго из условий (1.5) асимптотическое представление (2.17). В силу этого представления выполняется второе из знаковых условий (2.15).

Кроме того, из (3.29) и (2.17) следует, что

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_{sn}(t)}{\gamma_s J_{sn}(t)}[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.30}$$

Отсюда непосредственно следует второе из предельных условий (2.15) и в силу последнего из условий (1.9) — третье из предельных условий (2.15).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.14), (2.15). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала, учитывая первое из условий (2.15), подберем число $a_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы $\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \in \Delta_{Y_j}(b_j)$, $j=\overline{0,n-2}$, при $t \in [a_0,\omega[$, и рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(Y)} = \alpha_s \nu_{0n-1}\gamma_s \prod_{j=0}^{n-2}\left|\frac{1}{(n-j-1)!}\right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t)[1+v_n],$$

в котором L_{0sn-1} — функция, удовлетворяющая условиям (1.4) при $k=s$ и $j=n-1$, существующая в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций. Точно таким же образом, как при доказательстве достаточности теоремы 2.1, устанавливаем, что оно однозначно определяет заданную на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2}$, где $t_0 \in [a_0,\omega[$ и $\mathbb{R}_{1/2} = \left\{v_n \in \mathbb{R}\colon |v_n| \le \dfrac{1}{2}\right\}$, непрерывно дифференцируемую функцию вида

$$Y(t,v_n) = \nu_{0n-1}|J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s + z(t,v_n)}. \tag{3.31}$$

Здесь

$$|z(t,v_n)| < \frac{1}{2|\gamma_s|} \qquad \text{при} \quad (t,v_n) \in [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{1/2},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n) = 0 \qquad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{1/2}.$$

Далее, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered} \frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!}[1+v_j(\tau)], \quad j=\overline{1,n-1}, \\ y^{(n-1)}(t) = Y(t,v_n(\tau)), \qquad \tau(t) = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \end{gathered} \tag{3.32}$$

и учитывая, что функция $y^{(n-1)}(t) = Y(t,v_n(\tau))$ при $t \in [t_0,\omega[$ и $|v_n(\tau)| \le \dfrac{1}{2}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{0sn-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_s\nu_{0n-1}\gamma_s\prod_{j=0}^{n-2}\left|\frac{1}{(n-j-1)!}\right|^{\sigma_{sj}} J_{sn}(t)[1+v_n(\tau)],$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$v'_j = \beta\Bigg[(n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j - \frac{h(\tau)}{\gamma_s}G(\tau,v_1,\ldots,v_n)\times$$

$$\times \frac{(1+v_j)\prod_{i=0}^{n-2}|1+v_{i+1}|^{\sigma_{si}}}{1+v_n}\Biggr], \quad j=\overline{1,n-2},$$

$$v'_{n-1} = \beta\left[-v_{n-1} - \frac{h(\tau)}{\gamma_s}G(\tau,v_1,\ldots,v_n)\frac{(1+v_{n-1})\prod_{i=0}^{n-2}|1+v_{i+1}|^{\sigma_{si}}}{1+v_n}\right], \tag{3.33}$$

$$v'_n = \beta h(\tau)\left(-1-v_n+G(\tau,v_1,\ldots,v_n)\prod_{i=0}^{n-2}|1+v_{i+1}|^{\sigma_{si}}[1-H(\tau,v_n)]\right),$$

где

$$h(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)}, \qquad H(\tau(t),v_n) = \frac{Y(t,v_n)L'_{0sn-1}(Y(t,v_n))}{\gamma_s L_{0sn-1}(Y(t,v_n))},$$

$$G(\tau(t),v_1,\ldots,v_n) = \frac{L_{sn-1}(Y(t,v_n))}{L_{0sn-1}(Y(t,v_n))}\frac{\prod_{j=0}^{n-2}L_{sj}\left(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\right)}{\prod_{j=0}^{n-2}L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)}\times$$

$$\times\frac{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)\varphi_{kn-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_{kj}\left(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_{sn-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_{sj}\left(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\right)},$$

$$Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!}(1+v_{j+1})Y(t,v_n), \quad j=\overline{0,n-2}.$$

В силу (2.14) и первых двух из условий (2.15) существует $t_1 \in [t_0,\omega[$ такое, что

$$Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_{n-1}}(b_{n-1}), \qquad Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\in\Delta_{Y_j}(b_j), \qquad j=\overline{1,n-2},$$

$$\text{при} \quad t\in[t_1,\omega[\qquad \text{и} \qquad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{1/2}.$$

Следовательно, правые части системы дифференциальных уравнений непрерывны на множестве $[\tau_1,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{1/2}$, где $\tau_1=\beta\ln|\pi_\omega(t_1)|$. Кроме того, согласно третьему из условий (2.15)

$$\lim_{\tau\to+\infty}h(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega}h(\tau(t)) = 0,$$

а согласно (1.4), (3.31) и второму из условий (2.15)

$$\lim_{\tau\to+\infty}H(\tau,v_n) = \lim_{t\uparrow\omega}H(\tau(t),v_n) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{L_{sn-1}(Y(t,v_n))}{L_{0sn-1}(Y(t,v_n))} = 1$$

$$\text{равномерно по} \quad v_n\in\mathbb{R}_{1/2}.$$

Поскольку в силу (1.2), (3.3), (3.31), правила Лопиталя и третьего из условий (2.15)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln\varphi_{kn-1}(Y(t,v_n))}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\sigma_{kn-1}\ln|Y(t,v_n|+\ln L_{kn-1}(Y(t,v_n)|)}{\ln|\pi_\omega(t)|} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\sigma_{kn-1}+\frac{\ln L_{kn-1}(Y(t,v_n))}{\ln|Y(t,v_n)|}\right]\frac{\ln|Y(t,v_n)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}=$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\sigma_{kn-1}+\frac{\ln L_{kn-1}(Y(t,v_n))}{\ln|Y(t,v_n)|}\right]\left[\frac{1}{\gamma_s}+z(t,v_n)\right]\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|J_{sn}(t)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}=$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\sigma_{kn-1}+\frac{\ln L_{kn-1}(Y(t,v_n))}{\ln|Y(t,v_n)|}\right]\left[\frac{1}{\gamma_s}+z(t,v_n)\right]\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)}=0, \quad k=\overline{1,m},$$

равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{1/2}$ и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln\varphi_{kj}(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n))}{\ln|\pi_\omega(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\sigma_{kj}+\frac{\ln L_{kj}(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n))}{\ln|Y^{[j+1]}(t,v_{j+1},v_n)|}\right]\frac{\ln|Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}=$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\sigma_{kj}+\frac{\ln L_{kj}(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n))}{\ln|Y^{[j+1]}(t,v_{j+1},v_n)|}\right]\left[n-j-1+\frac{\ln\frac{|1+v_{j+1}|}{(n-j-1)!}}{\ln|\pi_\omega(t)|}+\frac{\ln|Y(t,v_n)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right]=$$

$$=\sigma_{kj}(n-j-1) \qquad \text{равномерно по} \quad v_j,v_n\in\mathbb{R}_{12}, \qquad k=\overline{1,m}, \quad j=\overline{0,n-2},$$

повторяя рассуждения из доказательства необходимости с использованием неравенства (2.13), устанавливаем, что для любого $k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)\varphi_{kn-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_{kj}\left(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\right)}{p_s(t)\varphi_{sn-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_{sj}\left(Y^{[j]}(t,v_{j+1},v_n)\right)}=0$$

$$\text{равномерно по} \quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{1/2}.$$

В силу установленных предельных соотношений систему дифференциальных уравнений (3.33) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&v'_j=\beta[f_j(\tau,v_1,\ldots,v_n)-(n-j)v_j+(n-j)v_{j+1}], \quad j=\overline{1,n-2},\\
&v'_{n-1}=\beta[f_{n-1}(\tau,v_1,\ldots,v_n)-v_{n-1}], \\
&v'_n=\beta h(\tau)\left[f_n(\tau,v_1,\ldots,v_n)+\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{si-1}v_i-v_n+V(v_1,\ldots,v_{n-1})\right],
\end{aligned} \tag{3.34}$$

где функции $f_j\colon [\tau_1,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{1/2}\longrightarrow\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, непрерывны и таковы, что

$$\lim_{\tau\to+\infty}f_j(\tau,v_1,\ldots,v_n)=0, \qquad j=\overline{1,n}, \qquad \text{равномерно по} \quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{1/2},$$

а V — функция вида

$$V(v_1,\ldots,v_{n-1})=\prod_{i=1}^{n-1}|1+v_i|^{\sigma_{si-1}}-1-\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{si-1}v_i.$$

Теперь выберем число $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \sum_{i=1}^{n-1} |\sigma_{si-1}| < 1,$$

и систему (3.34) с помощью дополнительного преобразования

$$v_j = \delta w_j, \qquad j = \overline{1, n-1}, \quad v_n = w_n, \tag{3.35}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w_j' &= \beta \left[\frac{1}{\delta} f_j(\tau, \delta w_1, \ldots, \delta w_{n-1}, w_n) - (n-j) w_j + (n-j) w_{j+1} \right], \quad j = \overline{1, n-2}, \\ w_{n-1}' &= \beta \left[\frac{1}{\delta} f_{n-1}(\tau, \delta w_1, \ldots, \delta w_{n-1}, w_n) - w_{n-1} \right], \\ w_n' &= \beta h(\tau) \left[f_n(\tau, \delta w_1, \ldots, \delta w_{n-1}, w_n) + \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{si-1} w_i - v_n + V(\delta w_1, \ldots, \delta w_{n-1}) \right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Для этой системы уравнений выполнены все условия теоремы 2.1 из работы [20]. Согласно этой теореме данная система имеет по крайней мере одно решение $(w_j)_{j=1}^n \colon [\tau_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_2 \ge \tau_1$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем в случае, когда $\beta > 0$, таких решений существует n-параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in]a_0, \omega[$, и $(n-1)$-параметрическое семейство, если $J_{sn}(t) < 0$ при $t \in]a_0, \omega[$, а в случае, когда $\beta < 0$, существует однопараметрическое семейство таких решений, если $J_{sn}(t) > 0$ при $t \in]a_0, \omega[$. Каждому такому решению в силу замен (3.35) и (3.32) соответствует $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17).

Теорема доказана.

***Замечание* 3.2.** Если в условиях (2.13) хотя бы для одного $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$ имеет место противоположное неравенство с заменой в нем $\limsup$ на $\liminf$, то, как следует из доказательства необходимости, для этого k предел, стоящий в (3.4) слева, будет равен $+\infty$. Поэтому условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} \le \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$$

в случае существования (конечных или равных $\pm\infty$) пределов, стоящих слева, являются необходимыми для того, чтобы на каждом $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-решении дифференциального уравнения (1.1) имело место соотношение (3.5), т. е. чтобы главным в правой части (1.1) было s-е слагаемое. В случае одного слагаемого $\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)})$, стоящего в правой части уравнения (1.1), теорема 2.3, очевидно, остается в силе без предположения о выполнении неравенств (2.13).

***Доказательство теоремы* 2.4.** Пусть дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-решение $y\colon [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$. Тогда согласно теореме 2.3 выполняются условия (2.14), (2.15) и это решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.16), (2.17). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что имеет место асимптотическое соотношение (3.30). Поскольку функция L_{sn-1} удовлетворяет условию S_0 и имеет место (3.30), в силу замечания 2.2

$$L_{sn-1}\left(y^{(n-1)}(t)\right) = L_{sn-1}\left(\nu_{0n-1}|J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s}\right)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (2.17) имеем

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_s} = \alpha_s \nu_{0n-1}\gamma_s \prod_{j=0}^{n-2}\left|\frac{1}{(n-j-1)!}\right|^{\sigma_{sj}} \times$$

$$\times J_{sn}(t) L_{sn-1}\left(\nu_{0n-1}|J_{sn}(t)|^{1/\gamma_s}\right)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и имеет место асимптотическое представление (2.18).

4. Пример уравнения с правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ коэффициентами. Предположим, что в дифференциальном уравнении (1.1) непрерывные функции $p_k\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, являются правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ порядков ϱ_k, $k = \overline{1, m}$. В этом случае

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \varrho_k \tag{4.1}$$

и при любом значении $s \in \{1, \dots, m\}$ для любой непрерывной функции $b_s\colon [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющей условию $\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) b(t) = \pm\infty$, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\displaystyle\int_a^t b(\tau)\,d\tau} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|} \frac{\ln|\pi_\omega(t)|}{\displaystyle\int_a^t b(\tau)\,d\tau} = 0.$$

Отсюда ясно, что всегда существует $s \in \{1, \dots, m\}$ и β_s — знак b_s такие, что выполняются неравенства

$$\beta_s(\gamma_k - \gamma_s) \geq 0 \qquad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\},$$

которые в силу замечания 3.1 являются необходимыми условиями существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, 1)$-решений дифференциального уравнения (1.1), на которых главным в правой части уравнения является s-е слагаемое. При этом в силу (2.8) необходимо, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s0}(t)}{J_{s0}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) b_s(t) = \pm\infty.$$

Однако это условие выполняться не может, так как в силу свойств правильно меняющихся функций

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s0}(t)}{J_{s0}(t)} = 1 + \varrho_s.$$

Значит, дифференциальное уравнение (1.1) с правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ коэффициентами не может иметь $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$-решений, на которых главным в правой части уравнения (1.1) является какое-либо из слагаемых.

***Замечание* 4.1.** В случае быстро меняющихся при $t \uparrow \omega$ коэффициентов уравнения (1.1) у него могут существовать $P_\omega(Y_0, \dots, y_{n-1}, 1)$-решения.

Теперь с использованием теоремы 2.3 выясним вопрос о наличии у рассматриваемого здесь дифференциального уравнения $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty\}$-решений, на которых главным в правой части уравнения является s-е слагаемое, где $s \in \{1, \dots, m\}$. В силу (4.1) и замечания 3.2 для их существования прежде всего необходимо выполнение неравенств

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) \le \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \text{при всех} \quad k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \tag{4.2}$$

Кроме того, необходимо выполнение неравенств (2.4), (2.14) и условий (2.15).

Поскольку в интеграле J_{sn} подынтегральная функция является правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ порядка $\varrho_s + \mu_{sn}$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)} = 1 + \varrho_s + \mu_{sn}.$$

Поэтому в силу последнего из условий (2.15) должно выполняться равенство

$$\varrho_s = -1 - \mu_{sn}. \tag{4.3}$$

На основании изложенного выше из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 4.1.** *Пусть в дифференциальном уравнении* (1.1) *непрерывные функции* $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[, k = \overline{1, m}$, *являются правильно меняющимися при* $t \uparrow \omega$ *порядков* ϱ_k, $k = \overline{1, m}$, $\gamma_s \ne 0$ *при некотором* $s \in \{1, \dots, m\}$ *и медленно меняющиеся при* $y^{[j]} \to Y_j$ *функции* L_{sj}, $j = \overline{0, n-2}$, *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-*решений уравнения* (1.1), *для которых имеют место предельные соотношения* (3.4), *необходимо, чтобы выполнялись неравенства* (2.4), (2.14), (4.2), *условие* (4.3) *и первые два из условий* (2.15), *причем для каждого такого решения имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления* (2.16), (2.17). *Если же наряду с* (2.4), (2.14), (4.3) *и первыми двумя из условий* (2.15) *выполняются строгие неравенства*

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) < \beta \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \textit{при всех} \quad k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}, \tag{4.4}$$

то существуют $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-*решения уравнения* (1.1). *Более того, таких решений в случае, когда* $\omega = +\infty$, *существует* n-*параметрическое семейство, если* $J_{sn}(t) > 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *и* $(n-1)$-*параметрическое семейство, если* $J_{sn}(t) < 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *а в случае, когда* $\omega < +\infty$ *и* $J_{sn}(t) > 0$ *при* $t \in [a_0, \omega[$, *существует однопараметрическое семейство таких решений.*

Данный результат существенно может быть уточнен в ситуации конкретного вида функций p_s и φ_{sj}, $j = \overline{0, n-1}$.

Допустим, например, что $\omega = +\infty$ и

$$p_s(t) = t^{\varrho_s} \ln^{r_s} t, \qquad \varphi_{sj} = |y^{(j)}|^{\sigma_{sj}} \left| \ln |y^{(j)}| \right|^{\lambda_{sj}}, \qquad j = \overline{0, n-1}. \tag{4.5}$$

В этом случае $\pi_\omega(t)=t$, $\beta=1$, функции $L_{sj}(y^{[j]})=\big|\ln|y^{(j)}|\big|^{\lambda_{sj}}$, $j=\overline{1,n-1}$, удовлетворяют условию S_0. Кроме того, в силу (4.3)

$$p_s(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{sn}}\prod_{j=0}^{n-2}L_{sj}\left(\nu_{0j}|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)=\left(\prod_{j=0}^{n-2}|n-j-1|^{\lambda_{sj}}\right)t^{-1}(\ln t)^{r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}},$$

и поэтому при $t\to+\infty$

$$J_{sn}(t)\sim\begin{cases}\dfrac{\prod_{j=0}^{n-2}|n-j-1|^{\lambda_{sj}}}{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}}(\ln t)^{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}}, & \text{если}\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\neq-1,\\ \left(\prod_{j=0}^{n-2}|n-j-1|^{\lambda_{sj}}\right)\ln\ln t, & \text{если}\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}=-1.\end{cases}$$

В силу этих соотношений условия (2.14) принимают вид

$$\begin{gathered}\nu_{0j}\nu_{0n-1}>0,\quad j=\overline{0,n-2},\\ \alpha_s\nu_{0n-1}=\begin{cases}\operatorname{sign}\gamma_s\Big(1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\Big), & \text{если}\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\neq-1,\\ \operatorname{sign}\gamma_s, & \text{если}\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}=-1.\end{cases}\end{gathered}\tag{4.6}$$

Из второго из этих условий сначала определяется знак $(n-1)$-й производной $P_{+\infty}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-решения, а из первого — знаки этого решения и его производных до порядка $n-2$ включительно.

Первые два из условий (2.15) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\nu_{0j}Y_j=+\infty,\quad j=\overline{0,n-2},\\ \nu_{0n-1}Y_{n-1}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \gamma_s\Big(1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\Big)<0,\\ 0, & \text{если}\quad \gamma_s<0,\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}=-1,\\ +\infty, & \text{если}\quad \gamma_s\Big(1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\Big)>0,\\ +\infty, & \text{если}\quad \gamma_s>0,\quad r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}=-1.\end{cases}\end{gathered}\tag{4.7}$$

Из них определяются предельные значения при $t\uparrow\omega$ для $P_{+\infty}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-решения и его производных до порядка $n-1$ включительно.

Поскольку в рассматриваемом случае все функции L_{sj}, $j=\overline{0,n-1}$, удовлетворяют условию S_0, то согласно теореме 2.4 для $P_{+\infty}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-решений допустимы при $t\uparrow\omega$ представления (2.16), (2.18). Здесь они примут вид

$$y^{(k-1)}(t) = C_{1k} t^{n-k} (\ln t)^{\frac{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}}{\gamma_s}} (\ln\ln t)^{\lambda_{sn-1}/\gamma_s} [1+o(1)], \quad k=\overline{1,n},$$

$$\text{если} \quad r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} \neq -1, \tag{4.8$_1$}$$

$$y^{(k-1)}(t) = C_{2k} t^{n-k} (\ln\ln t)^{1/\gamma_s} (\ln\ln\ln t)^{\lambda_{sn-1}/\gamma_s} [1+o(1)], \quad k=\overline{1,n},$$

$$\text{если} \quad r_s + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{sj} = -1, \tag{4.8$_2$}$$

где

$$C_{1k} = \frac{\nu_{0n-1}}{(n-k)!} \left| \frac{1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}}{\gamma_s} \right|^{\frac{\lambda_{sn-1}-1}{\gamma_s}} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j-1)^{\lambda_{sj}/\gamma_s}}{|(n-j-1)!|^{\sigma_{sj}/\gamma_s}},$$

$$C_{2k} = \frac{\nu_{0n-1}}{(n-k)!} |\gamma_s|^{1/\gamma_s} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j-1)^{\lambda_{sj}/\gamma_s}}{|(n-j-1)!|^{\sigma_{sj}/\gamma_s}}.$$

Таким образом, из следствия 4.1 и теоремы 2.4 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 4.2.** *Пусть в дифференциальном уравнении* (1.1) *непрерывные функции* $p_k\colon [a,+\infty[\ \longrightarrow\ ]0,+\infty[$, $k=\overline{1,m}$, *являются правильно меняющимися при* $t\to+\infty$ *порядков* ϱ_k, $k=\overline{1,m}$, $\gamma_s\neq 0$ *при некотором* $s\in\{1,\ldots,m\}$ *и функции* p_s, φ_{sj}, $j=\overline{0,n-1}$, *имеют вид* (4.5). *Тогда для существования* $P_{+\infty}(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$*-решений уравнения* (1.1), *на которых главным в правой части уравнения является* s*-е слагаемое, необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\varrho_k - \varrho_s \leq \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj}-\sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \textit{при всех} \quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}$$

и условия (4.3), (4.6), (4.7), *причем для каждого такого решения имеют место при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления* (4.8$_k$), $k\in\{1,2\}$. *Если же наряду с* (4.3), (4.6), (4.7) *выполняются строгие неравенства*

$$\varrho_k - \varrho_s < \sum_{j=0}^{n-2} (\sigma_{sj}-\sigma_{kj})(n-j-1) \qquad \textit{при всех} \quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{s\},$$

то существуют $P_\omega(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$*-решения уравнения* (1.1). *Более того, таких решений существует* n*-параметрическое семейство, если* $1+r_s+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_{sj}\geq 0$, *и* $(n-1)$*-параметрическое семейство — в противном случае.*

5. Выводы. В данной работе для дифференциального уравнения n-го порядка вида (1.1) с правильно меняющимися при $y^{(j)}\to Y_j$, $j=\overline{0,n-1}$, нелинейностями φ_{kj}, $k=\overline{1,m}$, получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решений в особых случаях, когда $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$, и установлены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

В теоремах 2.1 и 2.3 представление для $(n-1)$-й производной дается в неявной форме, но при некоторых дополнительных ограничениях (см. теоремы 2.2 и 2.4) оно может быть записано в явном виде.

Следует также обратить внимание на то, что в силу произвольности выбора $Y_0 \in \{\pm\infty; 0\}$ и $\omega \le +\infty$ установленные результаты позволяют описывать асимптотику не только правильных решений, стремящихся либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, но и различного типа сингулярных решений уравнения (1.1).

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
3. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524 – 526.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62 – 65.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **234**, № 2. – С. 258 – 260.
6. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
7. *Evtukhov V. M., Shebanina E. V.* Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. Tbilisi. – 1998. – **13**. – P. 150 – 153.
8. *Wong P. K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. – 1963. – **13**. – P. 737 – 760.
9. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Math. Z. – 1976. – **149**. – S. 261 – 266.
10. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, № 6. – P. 47 – 59.
11. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – 127 p.
12. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
13. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономних дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 310 – 331.
14. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2008. – **29**, № 1. – С. 52 – 62.
15. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 3 – 15.
16. *Евтухов В. М., Козьма А. А.* Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 924 – 938.
17. *Козьма А. А.* Условия существования и асимптотика одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2011. – **36**, № 2. – С. 176 – 187.
18. *Козьма А. А.* Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономних дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 468 – 481.
19. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
20. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.

Получено 25.04.12