УДК 517.51

С. А. Стасюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНАЛОГОВ КЛАССОВ БЕСОВА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

We obtain the exact-order estimates of some approximative characteristics for analogs of Besov classes (with logarithmic smoothness) of periodic functions of several variables.

Знайдено точні за порядком оцінки деяких апроксимативних характеристик аналогів класів Бєсова (з логарифмічною гладкістю) періодичних функцій багатьох змінних.

Пусть $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, норма в котором определяется равенством

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} \bigl|f(x)\bigr| < \infty.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ и кратного ядра Дирихле

$$\mathcal{D}_{\square_{2^n}} := \mathcal{D}_{\square_{2^n}}(x) := \sum_{k \in \square_{2^n}} e^{i(k,x)},$$

где $\square_N := \{\, k = (k_1, \ldots, k_d)\colon |k_j| < N, k_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \ldots, d, N \in \mathbb{N}\}$, положим

$$f_{(s)} := f * (\mathcal{D}_{\square_{2^s}} - \mathcal{D}_{\square_{2^{s-1}}}), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathcal{D}_{\square_{2^{-1}}} := 0.$$

Здесь значком $*$ обозначена операция свертки двух функций, т. е.

$$\varphi * g := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(y) g(x-y)\, dy \quad \text{для} \quad \varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d).$$

Рассмотрим пространство $B^{0,\alpha}_{p,\theta} := \bigl\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d)\colon \|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} < \infty \bigr\}$, где

$$\|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha\theta} \|f_{(s)}\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \tag{1}$$

а $\alpha > 0$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$. Пространства $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$ будем называть аналогами пространств Бесова с логарифмической гладкостью в связи с тем, что $B^r_{p,\theta} := B^{r,0}_{p,\theta} := \bigl\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d)\colon \|f\|_{B^{r,0}_{p,\theta}} < \infty \bigr\}$, $\|f\|_{B^{r,0}_{p,\theta}} := \Bigl(\sum_{s=0}^{\infty} \bigl(2^{rs}(s+1)^0 \bigr)^\theta \|f_{(s)}\|_p^\theta \Bigr)^{1/\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r > 0$, — пространства Бесова со степенной гладкостью.

Через $\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$, т. е.

$$\mathbf{B}^{0,\alpha}_{p,\theta} := \bigl\{ f \in B^{0,\alpha}_{p,\theta}\colon \|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} \le 1 \bigr\}.$$

Определим теперь величины, которые будем исследовать в работе.

Пусть $\Theta_m := \{k^j\}_{j=1}^m$ — произвольное множество m d-мерных целочисленных векторов. Положим

$$\mathcal{D}_{\Theta_m}(x) := \sum_{k\in\Theta_m} e^{i(k,x)},$$

$$S_{\Theta_m}(f) := f * \mathcal{D}_{\Theta_m},$$

$$\mathcal{T}_{\Theta_m} := \left\{ t\colon t(x) = \sum_{k\in\Theta_m} c_k\, e^{i(k,\,x)}, c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Заметим, что сумму $S_{\Theta_m}(f)$ можно представить в виде

$$S_{\Theta_m}(f) = \sum_{k\in\Theta_m} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$, обозначим

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q := \big\| f - S_{\square_{2^n}}(f) \big\|_q, \tag{2}$$

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q := \inf_{t\in\mathcal{T}_{\square_{2^n}}} \|f - t\|_q \tag{3}$$

и если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — некоторый функциональный класс, то положим

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q := \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q, \tag{4}$$

$$E_{\square_{2^n}}(F)_q := \sup_{f\in F} E_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{5}$$

Заметим, что величины $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q$ и $E_{\square_{2^n}}(f)_q$, согласно определениям (2) и (3), связаны неравенством

$$E_{\square_{2^n}}(f)_q \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q. \tag{6}$$

Величины

$$e_m^{\perp}(f)_q := \inf_{\Theta_m} \big\| f - S_{\Theta_m}(f) \big\|_q, \tag{7}$$

$$e_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{t\in\mathcal{T}_{\Theta_m}} \|f - t\|_q \tag{8}$$

называются соответственно наилучшим m-членным ортогональным тригонометрическим приближением и наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$. Как видно из определений (7) и (8), имеет место неравенство

$$e_m(f)_q \le e_m^{\perp}(f)_q. \tag{9}$$

Если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — некоторый функциональный класс, то полагаем

$$e_m(F)_q := \sup_{f\in F} e_m(f)_q, \tag{10}$$

$$e_m^{\perp}(F)_q := \sup_{f\in F} e_m^{\perp}(f)_q. \tag{11}$$

С $e_m(F)_q$ тесно связана величина

$$d_m^T(F)_q := \inf_{\Theta_m} \sup_{f\in F} \inf_{t\in\mathcal{T}_{\Theta_m}} \|f-t\|_q, \tag{12}$$

которая называется тригонометрическим m-поперечником F в $L_q(\mathbb{T}^d)$. Согласно определениям (10) и (12), имеет место неравенство

$$e_m(F)_q \le d_m^T(F)_q. \tag{13}$$

Пусть $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ и $\mathcal{L}_m$ — произвольное пространство в $L_q(\mathbb{T}^d)$ размерности m, тогда величина

$$d_m(F)_q := \inf_{\mathcal{L}_m} \sup_{f\in F} \inf_{u\in\mathcal{L}_m} \|f-u\|_q \tag{14}$$

называется колмогоровским m-поперечником F в $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Величина

$$\lambda_m(F)_q := \inf_{A:\,\mathrm{rank}A\le m} \sup_{f\in F} \|f-Af\|_q \tag{15}$$

называется линейным m-поперечником F в $L_q(\mathbb{T}^d)$. В (15) инфимум берется по всем линейным операторам A, действующим из F в $L_q(\mathbb{T}^d)$ и таким, что их ранг не превышает m.

Оптимизируем теперь линейные операторы $A\colon \mathrm{rank}A \le m$, требуя, чтобы оператор A был оператором ортогонального проектирования. Иными словами, A должен быть оператором Фурье, связанным с некоторой ортонормированной системой $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Величины

$$d_m^{\perp}(F)_q := \inf_{\{u_k\}_{k=1}^m} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{k=1}^m (f,u_k)u_k \right\|_q \tag{16}$$

называются ортопроекционными поперечниками или Фурье-поперечниками F в $L_q(\mathbb{T}^d)$. В (16) инфимум берется по всем нормированным в $L_2(\mathbb{T}^d)$ системам из m ограниченных функций.

Заметим, что согласно определениям (14) – (16) имеют место неравенства

$$d_m(F)_q \le \lambda_m(F)_q \le d_m^{\perp}(F)_q. \tag{17}$$

Кроме того, при $m = \sharp\square_{2^n} = (2^{n+1}-1)^d$, согласно определениям (4), (5), (11), (12), (16), выполняются неравенства

$$d_m^T(F)_q \leq E_{\square_{2^n}}(F)_q, \tag{18}$$

$$e_m^\perp(F)_q \leq \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q, \tag{19}$$

$$d_m^\perp(F)_q \leq \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q. \tag{20}$$

Пусть $L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$, — множество функций $f(x,y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} := \| \, \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

причем норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по переменной $x \in \mathbb{T}^d$, а затем от результата, но уже по переменной $y \in \mathbb{T}^d$, в пространстве $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $g \in L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ определим наилучшее m-членное билинейное приближение следующим образом:

$$\tau_m(g)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x),\, v_j(y)} \left\| g(x,y) - \sum_{j=1}^m u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,q_2}, \tag{21}$$

где $u_j \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_j \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Если $F \subset L_{q_1,q_2}(\mathbb{T}^{2d})$ — класс функций, то полагаем

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} := \sup_{g \in F} \tau_m(g)_{q_1,q_2}. \tag{22}$$

Величина (22) будет изучаться в предположении, что $g(x,y) := f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, и $f \in B^{0,\alpha}_{p,\theta}$.

Заметим, что согласно определениям (8) и (21) для $\tau_m\big(f(x-y)\big)_{q,q_1}$ и $e_m(f)_q$ можем записать соотношения

$$\tau_m\big(f(x-y)\big)_{q,q_1} \leq \tau_m\big(f(x-y)\big)_{q,\infty} \leq e_m(f)_q, \tag{23}$$

где $1 \leq q$, $q_1 \leq \infty$.

В. Н. Темляковым [1, с. 85] (гл. IV) установлено, что

$$\tau_m\big(f(x-y)\big)_{q,\infty} = d_m(F, L_q) \tag{24}$$

в предположении, что F — функциональный класс, инвариантный относительно сдвига аргумента функции $f \in F$. Равенство (24) позволяет при установлении оценки снизу для колмогоровских поперечников перейти к оценке снизу величины $\tau_m\big(f(x-y)\big)_{q,\infty}$.

Сформулируем утверждения, которые будут использованы при доказательстве результатов.

Лемма А [2]. *Пусть* $B_\infty^N = \big\{t \colon t \in \mathcal{T}_{\square_{N+1}}, \|t\|_\infty \leq 1\big\}$. *Для любых* $N \in \mathbb{N}$ *и* $m \leq N^d/2$ *при* $1 \leq q \leq \infty$ *имеет место соотношение*

$$e_m(B_\infty^N)_q \geq C(d).$$

Лемма В [3]. *Пусть задано число* $N \in \mathbb{N}$ *и* $m = N^d$. *Тогда для любой функции*

$$g(x) = \sum_{k \in \square_{2N+1}} \hat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такой, что $\left|\hat{g}(k)\right| \leq 1$ *и* $\left|\hat{g}(k)\right| = 1$ *при* $k \in \square_{N+1}$, *выполнено соотношение*

$$\tau_m \big(g(x-y)\big)_{2,1} \gg m^{1/2}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\alpha > 0$, *а параметры* p, q *и* θ *удовлетворяют условию* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $p > 1$, $q < \infty$, $1 \leq \theta \leq p_0 = \min\{2; p\}$. *Тогда*:

1) *при* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место оценки*

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp E_{\square_{2^n}}(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp n^{-\alpha};$$

2) *при* $m = 2, 3, \ldots$ *имеют место оценки*

$$e^{\perp}_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp e_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp d^T_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp (\log_2 m)^{-\alpha},$$

$$d_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp \lambda_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp d^{\perp}_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q \asymp (\log_2 m)^{-\alpha}, \quad \text{где} \quad q \geq 2,$$

$$\tau_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1} \asymp (\log_2 m)^{-\alpha}, \quad \text{где} \quad q \geq 2, \quad 1 \leq q_1 \leq \infty.$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса $B^{0,\alpha}_{p,\theta}$. Согласно соотношениям (6), (9), (17)–(20), (23) оценки сверху исследуемых аппроксимационных характеристик сводятся к установлению оценок сверху величины $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$.

В случае $1 \leq q \leq p < \infty$, $p > 1$, учитывая теорему Литтлвуда–Пэли и неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\nu}\right)^{1/\nu} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\mu}\right)^{1/\mu}, \qquad 1 \leq \mu \leq \nu < \infty, \quad a_k > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

получаем

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q \leq \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_p = \left\| f - \sum_{s=0}^{n} f_{(s)} \right\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)} \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \left| f_{(s)} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \left| f_{(s)} \right|^{p_0} \right)^{1/p_0} \right\|_p = \left(\left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \left| f_{(s)} \right|^{p_0} \right\|_{p/p_0} \right)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| \left| f_{(s)} \right|^{p_0} \right\|_{p/p_0} \right)^{1/p_0} = \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| f_{(s)} \right\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \Big((s+1)^{-\alpha} (s+1)^{\alpha} \left\| f_{(s)} \right\|_p \Big)^{\theta} \right)^{1/\theta} \leq n^{-\alpha} \|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\theta}} \leq n^{-\alpha}.$$

Наконец, для $1 \le q < \infty$, $p = \infty$ вследствие вложения $B^{0,\alpha}_{\infty,\theta} \subset B^{0,\alpha}_{q+1,\theta}$ имеем

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}\big(B^{0,\alpha}_{\infty,\theta}\big)_q \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}\big(B^{0,\alpha}_{q+1,\theta}\big)_{q+1} \ll n^{-\alpha}.$$

Переходя к установлению оценок снизу, отметим следующее. Принимая во внимание соотношения (9), (13), (17) – (19), (24), оценки снизу установим лишь для величин $e_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_q$ и $\tau_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1}$.

Покажем сначала, что имеет место вложение

$$C_1 k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} B^{2^k}_{\infty} \subset B^{0,\alpha}_{\infty,1}, \tag{25}$$

где

$$e_{3\cdot 2^k} := e_{3\cdot 2^k}(x) := \prod_{j=1}^{d} e^{i3\cdot 2^k x_j}, \tag{26}$$

а $C_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Действительно, для $T \in B^{2^k}_{\infty}$ имеем

$$\big\|k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} T\big\|_{B^{0,\alpha}_{\infty,1}} = k^{-\alpha}(k+3)^{\alpha}\big\|(e_{3\cdot 2^k}T)_{(k+2)}\big\|_{\infty} = k^{-\alpha}(k+3)^{\alpha}\|T\|_{\infty} \ll 1.$$

Пусть $m \asymp 2^{kd}$ и $m \le 2^{kd-1}$. Учитывая вложения (25) и

$$B^{0,\alpha}_{p,\theta} \supset B^{0,\alpha}_{\infty,\theta}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{27}$$

а также применяя лемму А, получаем

$$e_m\big(B^{0,\alpha}_{p,\theta}\big)_q \ge e_m\big(B^{0,\alpha}_{p,1}\big)_q \ge e_m\big(B^{0,\alpha}_{\infty,1}\big)_q \ge C_1 e_m\big(k^{-\alpha} e_{3\cdot 2^k} B^{2^k}_{\infty}\big)_q =$$

$$= C_1 k^{-\alpha} e_m\big(B^{2^k}_{\infty}\big)_q \gg k^{-\alpha} \asymp (\log_2 m)^{-\alpha}.$$

Экстремальную функцию, которая реализует нижнюю оценку величины $\tau_m(B^{0,\alpha}_{p,\theta})_{q,q_1}$, $q \ge 2$, $1 \le q_1 \le \infty$, будем строить, отправляясь от кратных полиномов Рудина – Шапиро

$$R_{2^k} := \prod_{j=1}^{d} \mathcal{R}_{2^k}(x_j) := \prod_{j=1}^{d} \sum_{l=-2^k}^{2^k} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \quad \varepsilon_l = \pm 1, \tag{28}$$

где $\mathcal{R}_{2^k}(x_j)$ — одномерные полиномы Рудина – Шапиро. Числа $\varepsilon_l = \pm 1$, $l = -2^k, \ldots, 2^k$, подобраны таким образом, что выполняется неравенство (см., например, [4, с. 146]) $\|\mathcal{R}_{2^k}\|_{\infty} \ll 2^{k/2}$, следовательно,

$$\|R_{2^k}\|_{\infty} = \big(\|\mathcal{R}_{2^k}\|_{\infty}\big)^d \ll 2^{kd/2}. \tag{29}$$

Покажем, что функция

$$g_1 = C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} e_{3\cdot 2^k} R_{2^k},$$

где $e_{3\cdot 2^k}$ и R_{2^k} заданы соответственно формулами (26) и (28), принадлежит классу $B^{0,\alpha}_{\infty,1}$ с соответствующей постоянной $C_2 > 0$. Действительно, учитывая неравенство (29), имеем

$$\|g_1\|_{B^{0,\alpha}_{\infty,1}} = C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \sum_{s=k+2}^{k+3} (s+1)^{\alpha} \Big\| (e_{3\cdot 2^k} R_{2^k})_{(s)} \Big\|_\infty =$$

$$= C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \Big((k+3)^{\alpha} \Big\| (e_{3\cdot 2^k} R_{2^k})_{(k+2)} \Big\|_\infty + (k+4)^{\alpha} \Big) =$$

$$= C_2 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \Big((k+3)^{\alpha} \|R_{2^k}\|_\infty + (k+4)^{\alpha} \Big) \ll 1.$$

Пусть $m = 2^{kd}$. Принимая во внимание вложение (27) и лемму В (полагая при этом $N = 2^k$, $g = R_{2^k}$), получаем

$$\tau_m \big(B^{0,\alpha}_{p,\theta}\big)_{q,q_1} \geq \tau_m \big(B^{0,\alpha}_{p,1}\big)_{q,q_1} \geq \tau_m \big(B^{0,\alpha}_{\infty,1}\big)_{q,q_1} \geq \tau_m \big(g_1(x-y)\big)_{q,q_1} \geq$$

$$\geq \tau_m \big(g_1(x-y)\big)_{2,1} = C_3 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \tau_m \big(e_{3\cdot 2^k}(x-y) R_{2^k}(x-y)\big)_{2,1} =$$

$$= C_3 k^{-\alpha} 2^{-kd/2} \tau_m \big(R_{2^k}(x-y)\big)_{2,1} \gg k^{-\alpha} 2^{-kd/2} m^{1/2} \asymp (\log_2 m)^{-\alpha}.$$

Теорема доказана.

1. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
2. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. and Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
3. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 187 – 191.
4. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – 2-е изд., доп. – М.: АФЦ, 1999. – 560 с.

Получено 20.06.13