УДК 517.518.843

Д. Ю. Мітін (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СУПЕРФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

Methods of superfractal approximation of sets introduced in 2005 – 2011 by Michael Barnsley, et al. are modified for the approximation of functions. Nonlinear operators are introduced in the space of bounded functions. The limit behavior of this operator sequence is investigated in the function space (in a sense of pointwise and uniform convergence). We consider a nonhyperbolic case in which not all plane maps specifying the operator on the function space are contractive and propose sufficient conditions for the convergence of approximators and estimates of the errors for this kind of approximation (similar to the collage theorem for fractal approximation).

Методы суперфрактальной аппроксимации множеств, введенные в 2005 – 2011 гг. в статьях Майкла Барнсли и др., адаптируются к аппроксимации функций. Вводятся нелинейные операторы в пространстве ограниченных функций. Исследуется предельное поведение последовательности этих операторов в пространстве функций в смысле поточечной и равномерной сходимости. Рассмотрен негиперболический случай, когда не все отображения плоскости, задающие оператор на пространстве функций, являются сжимающими. Предложены достаточные условия сходимости приближений и оценки величины погрешности такой аппроксимации (аналоги теоремы о коллаже из фрактального приближения).

1. Вступ. Поняття фрактальної інтерполяції функцій, фрактальної апроксимації множин, мір та функцій було введено наприкінці 80-х – початку 90-х років у роботах Джона Гатчінсона, Майкла Барнслі, Арно Жакена, Петера Массопуста та ін. [1]. Інтерес до цієї тематики був зумовлений, зокрема, можливістю застосувань до стиску та обробки графічних даних [2]. Пізніше стали розглядати гібридні фрактально-вейвлетні методи стиску даних. Питання знаходження умов збіжності алгоритмів фрактальної апроксимації та оцінок похибки такого наближення досі залишаються у центрі уваги досліджень з фрактального наближення [3, 4]. У циклі статей Барнслі, Гатчінсона, Орьяна Стенфло та ін. 2005 – 2011 рр. було запропоновано нові методи так званої суперфрактальної апроксимації множин та мір [5]. Ці суперфрактальні методи у порівнянні з класичними фрактальними методами характеризуються більшою гнучкістю побудови наближуючого об’єкта та можливістю досягнення кращого ступеня наближення. У статтях [6, 7] були спроби адаптувати суперфрактальні методи до інтерполяції функцій.

Цю роботу присвячено питанням суперфрактальної апроксимації функцій. Вводяться нелінійні оператори у просторі обмежених функцій. Досліджується гранична поведінка послідовності цих операторів у просторі функцій у сенсі поточкової та рівномірної збіжності. На відміну від звичайного фрактального наближення ця послідовність операторів не є послідовністю ітерацій одного оператора, тому застосування методів стискуючих чи зрештою стискуючих відображень метричних просторів, метричних теорем про нерухомі точки є обмеженим. У статті приділено увагу негіперболічному випадку, коли не всі відображення площини, що задають оператор на просторі функцій, є стискуючими. Запропоновано достатні умови збіжності наближень та оцінки величини похибки такої апроксимації (аналоги теореми про колаж з фрактального наближення).

2. Поточкова суперфрактальна апроксимація функцій. Позначимо через $B(I)$ банахів простір обмежених на I функцій зі стандартною нормою $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$, $f \in B(I)$. Нехай дано відрізок $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$; $\Omega := \{1, \ldots, m\}^\infty$, $m \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо:

1. Набір точок, які утворюють розбиття відрізка $I\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Позначимо $I_i := [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $I_n := [x_{n-1}, x_n]$ (так звані *регіони*). Очевидно, що $I_i \subset I$, $i = 1, \ldots, n$; $\bigcup_{i=1}^{n} I_n = I$; $I_i \cap I_j = \varnothing$ при $1 \le i \ne j \le n$.

2. Набори точок α_i, β_i, $i = 1, \ldots, n$, таких, що $a \le \alpha_i < \beta_i \le b$. Позначимо $I_i' := [\alpha_i, \beta_i)$ або $(\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \ldots, n-1$; $I_n' := [\alpha_n, \beta_n]$ (так звані *домени*).

3. Набір гомеоморфізмів $\varphi_i\colon I_i' \to I_i$, $i = 1, \ldots, n$.

4. Набір відображень $\psi_{ij}\colon I_i' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, таких, що

$$|\psi_{ij}(x,y) - \psi_{ij}(x,y')| \le d_{ij}|y - y'|, \qquad x \in I_i', \quad y, y' \in \mathbb{R}, \quad d_{ij} \ge 0, \tag{1}$$

$$\sup_{x \in I_i'} |\psi_{ij}(x,y)| < +\infty, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Позначимо $\delta_i := \max_{1 \le j \le m} d_{ij} \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Означення 1. *Фрактальні оператори Ріда – Байрактаревича* $T_j\colon B(I) \to B(I)$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$, *задаються таким чином*:

$$\big(T_j(f)\big)(x) = \psi_{ij}\big(\varphi_i^{-1}(x), f \circ \varphi_i^{-1}(x)\big), \qquad x \in I_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $f \in B(I)$, $x \in I$, $f \circ g := f(g)$.

Означення 2. *Послідовність суперфрактальних операторів* $\mathcal{T}^{(k)}\colon \Omega \times B(I) \to B(I)$, $k \ge$ ≥ 1, *задамо так*:

$$\big(\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f)\big)(x) = \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x) := \big(T_{j_1} \circ \ldots \circ T_{j_k}(f)\big)(x),$$

де $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots) \in \Omega$, $f \in B(I)$, $x \in I$.

Має місце зображення

$$\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x) = \psi_{i^1 j_1}\Big(\varphi_{i^1}^{-1}(x), \psi_{i^2 j_2}\Big(\varphi_{i^2}^{-1} \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x), \ldots$$

$$\ldots, \psi_{i^k j_k}\big(\varphi_{i^k}^{-1} \circ \ldots \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x), f \circ \varphi_{i^k}^{-1} \circ \ldots \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x)\big) \ldots\Big)\Big),$$

де $\boldsymbol{j} \in \Omega$, $f \in B(I)$, $x \in I$, а послідовність номерів $i^1 = i^1(x)$, $i^2 = i^2(x)$, $i^3 = i^3(x)$, … визначається з умов

$$x \in I_{i^1}, \qquad \varphi_{i^1}^{-1}(x) \in I_{i^2}, \quad \varphi_{i^2}^{-1} \circ \varphi_{i^1}^{-1}(x) \in I_{i^3}, \quad \ldots .$$

Зауважимо, що $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x)$ залежить лише від k перших компонент $\boldsymbol{j}$. Зручно вважати, що $\big(\mathcal{T}^{(0)}(\boldsymbol{j}, f)\big)(x) = \mathcal{T}^{(0)}(\boldsymbol{j}, f, x) := f(x)$.

Означення 3. *Суперфрактальну функцію* $g_{\boldsymbol{j}}^*\colon I \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$, *задамо таким чином*:

$$g_{\boldsymbol{j}}^*(x) := \lim_{k \to \infty} \big(\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f)\big)(x), \qquad f \in B(I), \quad x \in I. \tag{3}$$

Твердження 1. *Припустимо, що виконано умови* 1 – 4 *та для всіх* $x \in I$ *числовий ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{i^1(x)} \ldots \delta_{i^k(x)} < +\infty \tag{4}$$

збігається.

Тоді оператори $\mathcal{T}^{(k)}\colon \Omega \times B(I) \to B(I)$ *визначено коректно, тобто* $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, B(I)) \subset B(I)$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$, *а також функцію* $g_{\boldsymbol{j}}^*\colon I \to \mathbb{R}$ *визначено коректно, тобто поточкова границя* (3) *існує при всіх* $x \in I$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$ *та не залежить від* $f \in B(I)$.

Доведення. Має місце зображення

$$\mathcal{T}^{(k+p)}(\boldsymbol{j}, f, x) = \mathcal{T}^{(k)}\big(\boldsymbol{j}, \mathcal{T}^{(p)}(S^k\boldsymbol{j}, f, \cdot), x\big), \tag{5}$$

де $S\colon \Omega \to \Omega$ — зсув, $S(j_1, j_2, \ldots) = (j_2, j_3, \ldots)$. Крім того,

$$\Big|\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x) - \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, g, x)\Big| \le d_{i^1(x),j_1} \ldots d_{i^k(x),j_k} |f - g| \circ \varphi^{-1}_{i^k(x)} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}_{i^1(x)}(x). \tag{6}$$

Умови (1) та (2) гарантують, що $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, B(I)) \subset B(I)$. Дійсно, значення $|\psi_{ij}(x,y)| \le$ $\le |\psi_{ij}(x, y_0)| + d_{ij}|y - y_0|$ обмежене по $x \in I'_i$, $|y| \le C$, тобто $T_j(B(I)) \subset B(I)$. Враховуючи (5), отримуємо $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, B(I)) \subset \mathcal{T}^{(k-1)}(\boldsymbol{j}, B(I)) \subset \ldots \subset B(I)$.

Використовуючи (5) та (6), маємо

$$\Big|\mathcal{T}^{(k+p)}(\boldsymbol{j}, f, x) - \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x)\Big| \le \sum_{l=k}^{k+p-1} |\mathcal{T}^{(l+1)}(\boldsymbol{j}, f, x) - \mathcal{T}^{(l)}(\boldsymbol{j}, f, x)| = \tag{7}$$

$$= \sum_{l=k}^{k+p-1} |\mathcal{T}^{(l)}(\boldsymbol{j}, \mathcal{T}^{(1)}(S^l\boldsymbol{j}, f, \cdot), x) - \mathcal{T}^{(l)}(\boldsymbol{j}, f, x)| \le$$

$$\le \sum_{l=k}^{k+p-1} d_{i^1(x),j_1} \ldots d_{i^l(x),j_l} |\mathcal{T}^{(1)}(S^l\boldsymbol{j}, f) - f| \circ \varphi^{-1}_{i^l(x)} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}_{i^1(x)}(x) \le \tag{8}$$

$$\le \max_{1\le s\le m} \|T_s(f) - f\|_\infty \cdot \sum_{l=k}^{\infty} \delta_{i^1(x)} \ldots \delta_{i^l(x)} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{9}$$

з огляду на умову (4). Отже, числова послідовність $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x)$, $k \ge 1$, фундаментальна, тому має границю.

З (6) випливає

$$\Big|\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x) - \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, g, x)\Big| \le \delta_{i^1(x)} \ldots \delta_{i^k(x)} \sup_I |f - g| \to 0, \quad k \to \infty,$$

знову з огляду на умову (4). Отже, границя не залежить від f.

Твердження 2 (аналог теореми про колаж)**.** *У припущеннях попереднього твердження мають місце такі нерівності*:

1) *для всіх* $f \in B(I)$, $x \in I$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$

$$\big|f - g^*_{\boldsymbol{j}}\big|(x) \le |T_{j_1}(f) - f|(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} d_{i^1(x),j_1} \ldots d_{i^k(x),j_k} |T_{j_{k+1}}(f) - f| \circ \varphi^{-1}_{i^k(x)} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}_{i^1(x)}(x);$$

2) *для всіх* $f \in B(I)$, $x \in I$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$ *та* $k \ge 1$

$$\big|\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x) - g^*_{\boldsymbol{j}}(x)\big| \le \sum_{l=k}^{\infty} d_{i^1(x),j_1} \ldots d_{i^l(x),j_l} |T_{j_{l+1}}(f) - f| \circ \varphi^{-1}_{i^l(x)} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}_{i^1(x)}(x). \tag{10}$$

Доведення. 2. Перейдемо в (7) та (8) до границі при $p \to \infty$.

1. Залишилось покласти $k = 0$ у частині 2.

3. Рівномірна суперфрактальна апроксимація функцій. У цьому пункті будемо припускати виконання умов $1-4$ та використовувати позначеннями з попереднього пункту.

Розглянемо для фіксованого $\boldsymbol{j} \in \Omega$ граничну поведінку $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, \cdot) : B(I) \to B(I)$, $k \geq \geq 1$, у просторі $(B(I), \|\cdot\|_\infty)$, тобто дослідимо питання про рівномірність по $x \in I$ збіжності $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f, x)$ до поточкової границі $g^*_{\boldsymbol{j}}(x)$ при $k \to \infty$.

Введемо позначення для множин

$$I'_{i_1 \ldots i_k} := \varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k} \cap \varphi_{i_{k-1}}^{-1}(I_{i_{k-1}} \cap \ldots \varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2} \cap \varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1})) \ldots)) \subset I,$$

$$(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k,$$

які є проміжками (або точками), якщо $I'_{i_1 \ldots i_k} \neq \varnothing$, а також чисел

$$\Delta^{(k)} := \max_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n: \\ I'_{i_1 \ldots i_k} \neq \varnothing}} \delta_{i_1} \ldots \delta_{i_k} \geq \Delta^{(k)}_{j_1 \ldots j_k} := \max_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n: \\ I'_{i_1 \ldots i_k} \neq \varnothing}} d_{i_1 j_1} \ldots d_{i_k j_k} \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Твердження 3. 1. *Оператор* $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, \cdot)$ *діє у просторі* $(B(I), \|\cdot\|_\infty)$ *неперервно.*

2. *Якщо* $\Delta^{(k)} < 1$, *то оператор* $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, \cdot)$ *у просторі* $(B(I), \|\cdot\|_\infty)$ *є стискуючим.*

Доведення. З нерівності (6), переходячи до супремумів по $x \in I$, маємо

$$\left\| \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f) - \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, g)) \right\|_\infty \leq \sup_{x \in I} d_{i^1(x), j_1} \ldots d_{i^k(x), j_k} \, |f - g| \circ \varphi_{i^k(x)}^{-1} \circ \ldots \circ \varphi_{i^1(x)}^{-1}(x) =$$

$$= \max_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n: \\ I'_{i_1 \ldots i_k} \neq \varnothing}} \left(d_{i_1 j_1} \ldots d_{i_k j_k} \sup_{I'_{i_1 \ldots i_k}} |f - g| \right) \leq \Delta^{(k)} \cdot \|f - g\|_\infty.$$

Отже, оператор $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, \cdot)$ у просторі $B(I)$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\Delta^{(k)}$.

Твердження 4. *Припустимо, що ряд функцій* (4) *збігається рівномірно по* $x \in I$. *Тоді* $g^*_{\boldsymbol{j}} \in B(I)$ *та для довільних* $\boldsymbol{j} \in \Omega$, $f \in B(I)$ *при* $k \to \infty$ *функції* $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f)$ *збігаються до* $g^*_{\boldsymbol{j}}$ *у просторі* $(B(I), \|\cdot\|_\infty)$.

При цьому функція $g^*_{\boldsymbol{j}}$ *задовольняє тотожність*

$$\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, g^*_{S^k \boldsymbol{j}}) = g^*_{\boldsymbol{j}}, \qquad \boldsymbol{j} \in \Omega, \quad k \geq 1.$$

Доведення. З (7) та (9), переходячи до супремумів по $x \in I$, маємо

$$\|\mathcal{T}^{(k+p)}(\boldsymbol{j}, f) - \mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f)\|_\infty \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq s \leq m} \|T_s(f) - f\|_\infty \sup_{x \in I} \sum_{l=k}^{\infty} \delta_{i^1(x)} \ldots \delta_{i^l(x)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

через рівномірну збіжність ряду (4). Отже, послідовність функцій $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f)$, $k \geq 1$, фундаментальна у $B(I)$, тому має границю, а саме $g^*_{\boldsymbol{j}} \in B(I)$.

Для встановлення тотожності досить перейти у рівності (5) до границі в сенсі простору $B(I)$ при $p \to \infty$, використовуючи неперервність оператора $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, \cdot)$ у $B(I)$.

Наслідок 1. 1. *Існує скінченна границя* $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta^{(k)}} =: D \geq 0$.

2. *Для виконання припущення твердження* 4 *достатньо, щоб виконувалась умова* $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)} < +\infty$. *Тоді, крім того,* $D \leq 1$.

3. *Умова* $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)} < +\infty$ *рівносильна умові, що існує такий номер* k_0, *що* $\Delta^{(k_0)} < 1$, *а також умові, що існує такий номер* k_1, *що* $\Delta^{(k)} < 1$ *при всіх* $k \geq k_1$.

4. *За умови* $\inf_{k\geq 1}\Delta^{(k)} < 1$ *існує такий номер* k_1, *що всі оператори* $\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j},\cdot)$, $k \geq k_1$, *є стискуючими у просторі* $(B(I), \|\cdot\|_\infty)$.

5. *Якщо* $D < 1$, *то* $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)} < +\infty$.

Доведення. 1. Оскільки, як легко бачити, числова послідовність $\Delta^{(k)}$, $k \geq 1$, субмультиплікативна: $\Delta^{(k+l)} \leq \Delta^{(k)}\Delta^{(l)}$, то за відомою властивістю таких послідовностей існує границя $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\Delta^{(k)}}$.

2. Оскільки наведений числовий ряд мажорує ряд функцій (4), то останній збігається рівномірно, й припущення твердження 4 виконано. За стандартною ознакою збіжності числового ряду границя D не може бути строго більшою за 1.

3. Очевидно, що з першої умови випливає третя, а з третьої друга. Імплікація, що залишилась, теж випливає з властивості субмультиплікативності: якщо $\Delta^{(k_0)} < 1$, то

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k_0-1}\Delta^{(sk_0+r)} \leq \sum_{s=0}^{\infty}\left(\Delta^{(k_0)}\right)^s \sum_{r=0}^{k_0-1}\Delta^{(r)} < +\infty.$$

4. Наслідок пункту 3 та твердження 3 (пункт 2).

5. Знову ознака збіжності числового ряду.

Теорема (аналог теореми про колаж). *Нехай виконано умови* 1 – 4 *та* $\inf_{k\geq 1}\Delta^{(k)} < 1$. *Виберемо* k_0 *так, щоб* $\Delta^{(k_0)} < 1$. *Тоді мають місце такі нерівності*:

1) *для всіх* $f \in B(I)$ *та* $\boldsymbol{j} \in \Omega$

$$\|f - g^*_{\boldsymbol{j}}\|_\infty \leq \|T_{j_1}(f) - f\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)}_{j_1\ldots j_k}\|T_{j_{k+1}}(f) - f\|_\infty \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\Delta^{(k_0)}}\left(1 + \sum_{k=1}^{k_0-1}\Delta^{(k)}\right)\max_{1\leq s\leq m}\|T_s(f) - f\|_\infty;$$

2) *для всіх* $f \in B(I)$, $\boldsymbol{j} \in \Omega$ *та* $k \geq 1$

$$\|\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f) - g^*_{\boldsymbol{j}}\|_\infty \leq \sum_{l=k}^{\infty}\Delta^{(l)}_{j_1\ldots j_l}\|T_{j_{l+1}}(f) - f\|_\infty \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\Delta^{(k_0)}}\sum_{l=k}^{k+k_0-1}\Delta^{(l)}\max_{1\leq s\leq m}\|T_s(f) - f\|_\infty.$$

Доведення. 2. З (10), переходячи до супремумів по $x \in I$, маємо

$$\|\mathcal{T}^{(k)}(\boldsymbol{j}, f) - g^*_{\boldsymbol{j}}\|_\infty \leq \sup_{x\in I}\sum_{l=k}^{\infty} d_{i^1(x),j_1}\ldots d_{i^l(x),j_l}\sup_{I'_{i^1(x)\ldots i^l(x)}}|T_{j_{l+1}}(f) - f| \leq$$

$$\leq \sum_{l=k}^{\infty} \Delta^{(l)}_{j_1\ldots j_l} \|T_{j_{l+1}}(f) - f\|_\infty \leq \sum_{l=k}^{\infty} \Delta^{(l)} \|T_{j_{l+1}}(f) - f\|_\infty.$$

Крім того,

$$\sum_{l=k}^{\infty} \Delta^{(l)} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{k+k_0-1} \Delta^{(sk_0+l)} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \big(\Delta^{(k_0)}\big)^s \sum_{l=k}^{k+k_0-1} \Delta^{(l)}.$$

1. Залишилось покласти $k = 0$ у нерівності з пункту 2.

Нерівність з пункту 1 можна розглядати як оцінку похибки рівномірного наближення даної обмеженої функції f суперфрактальними функціями $g^*_{\boldsymbol{j}}(\cdot) = g^*_{\boldsymbol{j}}\big(\cdot\,; \{I'_i, \varphi_i, \psi_{ij}\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}\big)$, які залежать від вибору проміжків I'_i та відображень φ_i, ψ_{ij} з деякого наперед заданого класу варіантів такого вибору.

1. *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. – 2 nd ed. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 1993. – 547 p.
2. *Fisher Y. (editor).* Fractal image compression: Theory and application. – New York: Springer, 1995. – 359 p.
3. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 161 – 175.
4. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Поточкова фрактальна апроксимація функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 200 – 211.
5. *Barnsley M. F.* Superfractals. – New York: Cambridge Univ. Press, 2006. – 463 p.
6. *Kapoor G. P., Prasad S. A.* Super fractal interpolation functions. – 2012. – 20 p. – (Preprint) / arXiv:1201.3491v1.
7. *Kapoor G. P., Prasad S. A.* Convergence of cubic spline super fractal interpolation functions. – 2012. – 15 p. – (Preprint) / arXiv:1201.3997v1.

Одержано 02.09.13,
після доопрацювання — 27.03.14