УДК 517.95

А. Л. Гладков (Белорус. гос. ун-т, Минск),
Т. В. Кавитова (Витеб. гос. ун-т им. П. М. Машерова, Беларусь)

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

We consider an initial-boundary-value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions. We prove comparison principle, establish the existence of a local solution, and study the problem of uniqueness and nonuniqueness.

Розглядається початково-крайова задача для напівлінійного параболічного рівняння з нелінійними нелокальними граничними умовами. Доведено принцип порівняння, локальне існування розв'язку і вивчено питання єдиності та неєдиності.

1. Введение. Рассматриваются неотрицательные решения начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + c(x,t)u^p,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1.1}$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{1.2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $p > 0$, $l > 0$, Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1.1) – (1.3) сделаны следующие предположения:

$$c(x,t) \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)),\ 0 < \alpha < 1,\ c(x,t) \geq 0,$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)),\ k(x,y,t) \geq 0,$$

$$u_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega,\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy,\ x \in \partial\Omega.$$

Исследованию начально-краевых задач для параболических уравнений и систем с нелинейными нелокальными граничными условиями Дирихле посвящено большое количество работ (см., например, [1 – 9] и приведенную в них библиографию). В частности, начально-краевая задача для уравнения (1.1) с нелокальным граничным условием

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

рассматривалась для случаев $c(x,t) \leq 0$ и $c(x,t) \geq 0$ соответственно в работах [2, 3] и [4, 5].

Отметим, что при $p < 1$ и $l < 1$ нелинейности соответственно в уравнении (1.1) и граничном условии (1.2) не удовлетворяют условию Липшица в правой полуокрестности точки $u = 0$. Вопросы единственности и неединственности решений начально-краевых задач с нелипшицевыми нелинейностями для различных параболических уравнений и систем исследовались многими авторами (см., например, [3, 5, 10 – 14] и приведенную в них библиографию).

В настоящей работе в пункте 2 для задачи (1.1) – (1.3) доказан принцип сравнения, в пункте 3 установлено локальное существование решения, а в пункте 4 исследованы вопросы единственности и неединственности решения.

2. Принцип сравнения. Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T),\ S_T = \partial\Omega \times (0,T),\ \Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Определение 2.1. *Неотрицательную функцию* $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ *назовем верхним решением задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T, *если*

$$u_t \geq \Delta u + c(x,t)u^p, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} \geq \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \qquad (x,t) \in S_T, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) \geq u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Неотрицательную функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ *назовем нижним решением задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T, *если неравенства* (2.1) – (2.3) *выполнены с противоположным знаком. Функцию* $u(x,t)$ *будем называть решением задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T, *если* $u(x,t)$ *одновременно является верхним и нижним решением задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T.

Определение 2.2. *Решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T *назовем максимальным, если для любого другого решения* $v(x,t)$ *задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T *выполнено неравенство* $v(x,t) \leq u(x,t)$ *в* Q_T.

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0(x) \not\equiv 0$ *в* Ω *и* $u(x,t)$ *— решение задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T. *Тогда* $u(x,t) > 0$ *для* $(x,t) \in Q_T \cup S_T$.

Доказательство. Поскольку $u_0(x) \not\equiv 0$ в Ω и $u_t - \Delta u = c(x,t)u^p \geq 0$ в Q_T, согласно сильному принципу максимума $u(x,t) > 0$ в Q_T. Покажем, что $u(x,t) > 0$ при $(x,t) \in S_T$. Предположим, что существует такая точка $(x_0,t_0) \in S_T$, что $u(x_0,t_0) = 0$. Тогда в силу теоремы 3.6 (см. [15]) $\partial u(x_0,t_0)/\partial\nu < 0$, что противоречит условию (1.2).

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$ *— соответственно верхнее и нижнее решения задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_T. *Кроме того, если* $\min(p,l) < 1$, *то предположим, что* $u(x,t) > 0$ *или* $v(x,t) > 0$ *при* $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$. *Тогда* $u(x,t) \geq v(x,t)$ *при* $(x,t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.

Доказательство. Пусть для $t \in (0,T)$ неотрицательная функция $\varphi(x,\tau)$ принадлежит $C^{2,1}(\overline{Q}_t)$ и удовлетворяет однородному граничному условию Неймана. Умножим (2.1) на φ и проинтегрируем полученное неравенство по области Q_t. Применяя формулу Грина и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)\varphi(x,t)\,dx \geq \int\limits_{\Omega} u(x,0)\varphi(x,0)\,dx +$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left(u(x,\tau)\varphi_\tau(x,\tau) + u(x,\tau)\Delta\varphi(x,\tau) + c(x,\tau)u^p(x,\tau)\varphi(x,\tau)\right) dx\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x,\tau) \int_\Omega k(x,y,\tau)u^l(y,\tau)\, dy\, dS_x\, d\tau. \qquad (2.4)$$

С другой стороны, нижнее решение $v(x,t)$ удовлетворяет неравенству (2.4) с противоположным знаком

$$\int_\Omega v(x,t)\varphi(x,t)\, dx \le \int_\Omega v(x,0)\varphi(x,0)\, dx +$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left(v(x,\tau)\varphi_\tau(x,\tau) + v(x,\tau)\Delta\varphi(x,\tau) + c(x,\tau)v^p(x,\tau)\varphi(x,\tau)\right) dx\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x,\tau) \int_\Omega k(x,y,\tau)v^l(y,\tau)\, dy\, dS_x\, d\tau. \qquad (2.5)$$

Пусть $w(x,t) = v(x,t) - u(x,t)$. Из неравенств (2.4) и (2.5) получаем

$$\int_\Omega w(x,t)\varphi(x,t)\, dx \le \int_\Omega w(x,0)\varphi(x,0)\, dx +$$

$$+\int_0^t \int_\Omega w(x,\tau) \Big(\varphi_\tau(x,\tau) + \Delta\varphi(x,\tau) + p\theta_1^{p-1}(x,\tau)c(x,\tau)\varphi(x,\tau)\Big) dx\, d\tau +$$

$$+l\int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x,\tau) \int_\Omega \theta_2^{l-1}(y,\tau)k(x,y,\tau)w(y,\tau)\, dy\, dS_x\, d\tau, \qquad (2.6)$$

где $\theta_i,\ i = 1, 2,$ — непрерывные положительные в $\overline{Q}_t$ функции для $\min(p,l) < 1$ и непрерывные неотрицательные в $\overline{Q}_t$ функции в противном случае.

Функцию $\varphi(x,\tau)$ определим как решение задачи

$$\varphi_\tau + \Delta\varphi + p\theta_1^{p-1}(x,\tau)c(x,\tau)\varphi = 0, \qquad (x,\tau) \in Q_t,$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\nu} = 0, \qquad (x,\tau) \in S_t,$$

$$\varphi(x,t) = \psi(x), \qquad x \in \Omega,$$

где $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega),\ 0 \le \psi \le 1$. Из принципа сравнения для линейных параболических уравнений следует, что решение $\varphi(x,\tau)$ данной задачи неотрицательно и ограничено. В силу (2.6) и неравенства $w(x,0) \leq 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} w(x,t)\psi(x)\,dx \leq m(t)\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} w_+(x,\tau)\,dx\,d\tau, \tag{2.7}$$

где

$$w_+ = \max(0,w), \qquad m(t) = l|\partial\Omega| \sup_{\partial\Omega\times Q_t} k(x,y,\tau) \sup_{Q_t} \theta_2^{l-1}(x,\tau) \sup_{S_t} \varphi(x,\tau),$$

$|\partial\Omega|$ — мера Лебега множества $\partial\Omega$. Заметим, что $m(t) \leq m(T_0)$ при $t \in (0,T_0]$ для любого $T_0 \in (0,T)$.

Выберем последовательность $\psi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega),\ 0 \leq \psi_n \leq 1$, сходящуюся в $L^1(\Omega)$ к функции

$$\gamma_t(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } w(x,t) > 0, \\ 0, \text{ если } w(x,t) \leq 0. \end{cases}$$

Подставляя в (2.7) $\psi_n(x)$ вместо $\psi(x)$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} w_+(x,t)\,dx \leq m(T_0)\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} w_+(x,\tau)\,dx\,d\tau, \qquad t \in (0,T_0].$$

В силу произвольности T_0 и леммы Гронуолла $w_+(x,t) \leq 0$ в Q_T.

Теорема 2.2 доказана.

Из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Предположим, что задача* (1.1) – (1.3) *имеет решение в* Q_T *с неотрицательным начальным условием для* $\min(p,l) \geq 1$ *и положительным начальным условием в противном случае. Тогда решение задачи* (1.1) – (1.3) *единственно.*

3. Существование локального решения. В данном пункте докажем существование локального решения задачи (1.1) – (1.3), используя формулу представления решения и принцип сжимающих отображений.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такова, что $0 < \varepsilon_m < 1$ и $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. При $\varepsilon = \varepsilon_m,\ m = 1,2,\ldots$, введем в рассмотрение функции $u_{0\varepsilon}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_{0\varepsilon}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad u_{0\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, \qquad u_{0\varepsilon_i}(x) \geq u_{0\varepsilon_j}(x),$$

$$\varepsilon_i \geq \varepsilon_j, \qquad u_{0\varepsilon}(x) \to u_0(x) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$\frac{\partial u_{0\varepsilon}(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,0)u_{0\varepsilon}^l(y)\,dy, \qquad x \in \partial\Omega.$$

Отметим, что в случае $\min(p,l) < 1$ условие Липшица в правой полуокрестности точки $u = 0$ по крайней мере для одной из нелинейностей в (1.1) и (1.2) не выполняется. Поэтому рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения (1.1) с граничным условием (1.2) и начальным условием

$$u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Для некоторого* $T > 0$ *задача* (1.1), (1.2), (3.1) *имеет единственное решение в* Q_T.

Доказательство. Пусть $G_N(x,y;t-\tau)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности с однородным граничным условием Неймана. Отметим, что функция $G_N(x,y;t-\tau)$ имеет следующие свойства (см., например, [16]):

$$G_N(x,y;t-\tau) \geq 0, \qquad x,y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_\Omega G_N(x,y;t-\tau)\,dy = 1, \qquad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t. \tag{3.3}$$

Как известно, функция $u_\varepsilon(x,t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (3.1) в Q_σ тогда и только тогда, когда

$$u_\varepsilon(x,t) = \int\limits_\Omega G_N(x,y;t)u_{0\varepsilon}(y)\,dy + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G_N(x,y;t-\tau)c(y,\tau)u_\varepsilon^p(y,\tau)\,dy\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau)\int\limits_\Omega k(\xi,y,\tau)u_\varepsilon^l(y,\tau)\,dy\,dS_\xi\,d\tau \equiv Lu_\varepsilon(x,t), \qquad (x,t)\in Q_\sigma. \tag{3.4}$$

Для доказательства разрешимости уравнения (3.4) используем принцип сжимающих отображений. Определим последовательность $\{u_{\varepsilon,n}(x,t)\},\ n = 1,2,\ldots,$ следующим образом:

$$u_{\varepsilon,1}(x,t) \equiv \varepsilon, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_\sigma, \tag{3.5}$$

и

$$u_{\varepsilon,n+1}(x,t) = Lu_{\varepsilon,n}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q}_\sigma, \quad n = 1,2,\ldots . \tag{3.6}$$

Пусть

$$M_{0\varepsilon} = \sup_\Omega u_{0\varepsilon}(x).$$

С помощью метода математической индукции покажем, что при $M > \max(\varepsilon, M_{0\varepsilon})$ и некотором $\gamma \in (0,\sigma]$ имеют место соотношения

$$\sup_{Q_\gamma} u_{\varepsilon,n}(x,t) \leq M, \qquad n = 1,2,\ldots . \tag{3.7}$$

При $n = 1$ выполнение (3.7) очевидно. Предположим, что неравенство (3.7) выполняется для $n = m$, и докажем его для $n = m+1$. Действительно, в силу (3.2)–(3.4) и (3.6)

$$u_{\varepsilon,m+1}(x,t) = \int\limits_\Omega G_N(x,y;t)u_{0\varepsilon}(y)\,dy + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G_N(x,y;t-\tau)c(y,\tau)u_{\varepsilon,m}^p(y,\tau)\,dy\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau)\int\limits_\Omega k(\xi,y,\tau)u_{\varepsilon,m}^l(y,\tau)\,dy\,dS_\xi\,d\tau \leq M_{0\varepsilon} + M^p\nu(t) + M^l\mu(t), \tag{3.8}$$

где $(x,t) \in Q_\gamma$ и

$$\nu(t) = \sup_{\Omega} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G_N(x,y;t-\tau)c(y,\tau)\,dy\,d\tau,$$

$$\mu(t) = \sup_{\Omega} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau) \int\limits_{\Omega} k(\xi,y,\tau)\,dy\;dS_\xi\,d\tau.$$

Отметим (см. [17]), что существуют положительные константы δ_1 и a_1 такие, что

$$\mu(t) \le a_1\sqrt{t} \text{ при } 0 \le t \le \delta_1. \tag{3.9}$$

В силу (3.2), (3.3) имеем

$$\nu(t) \le a_2 t \text{ при } 0 \le t \le \delta_2, \tag{3.10}$$

где δ_2 и a_2 — некоторые положительные константы. Выберем γ так, чтобы $0 < \gamma \le \min(\delta_1,\delta_2)$ и выполнялось неравенство

$$\sup_{(0,\gamma)}(M^p\nu(t) + M^l\mu(t)) \le M - M_{0\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Из (3.8) и (3.11) следует (3.7) для $n = m+1$. В силу (3.2)–(3.6) и свойств $u_{0\varepsilon}(x)$ имеем

$$u_{\varepsilon,n}(x,t) \ge \varepsilon, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_\gamma, \quad n = 1,2,\ldots\,. \tag{3.12}$$

Применяя формулу Лагранжа, для $n = 2,3,\ldots$ получаем

$$\sup_{Q_\gamma} |u_{\varepsilon,n+1}(x,t) - u_{\varepsilon,n}(x,t)| =$$

$$= \sup_{Q_\gamma} \left| \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau)c(y,\tau)(u^p_{\varepsilon,n}(\xi,\tau) - u^p_{\varepsilon,n-1}(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau) \int\limits_{\Omega} k(\xi,y,\tau)(u^l_{\varepsilon,n}(y,\tau) - u^l_{\varepsilon,n-1}(y,\tau))\,dy\,dS_\xi\,d\tau \right| \le$$

$$\le \sup_{Q_\gamma} \left(p\theta^{p-1}_{1,n}(x,t)\nu(t) + l\theta^{l-1}_{2,n}(x,t)\mu(t) \right) \sup_{Q_\gamma} |u_{\varepsilon,n}(x,t) - u_{\varepsilon,n-1}(x,t)| \le$$

$$\le \sup_{(0,\gamma)} \rho(t) \sup_{Q_\gamma} |u_{\varepsilon,n}(x,t) - u_{\varepsilon,n-1}(x,t)| \le (M+\varepsilon) \left(\sup_{(0,\gamma)} \rho(t) \right)^{n-1},$$

где $\theta_{i,n}(x,t)$, $i = 1,2,$ — непрерывные в $\overline{Q}_\gamma$ функции такие, что $\alpha_1 \le \theta_{i,n}(x,t) \le M_1$, $(x,t) \in \overline{Q}_\gamma$, $\rho(t) = p(\alpha_1^{p-1} + M_1^{p-1})\nu(t) + l(\alpha_1^{l-1} + M_1^{l-1})\mu(t)$, $t \in [0,\gamma]$. Отметим, что положительные константы α_1 и M_1 не зависят от n. В силу (3.9) и (3.10) существует такая константа $T \in (0, \gamma)$, что

$$\sup_{(0,T)} \rho(t) < 1.$$

Следовательно, последовательность $\{u_{\varepsilon,n}(x,t)\}$ сходится равномерно в $\overline{Q}_T$ при $n \to \infty$. Определим

$$u_\varepsilon(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_{\varepsilon,n}(x,t).$$

В силу (3.7) и (3.12) имеем

$$\varepsilon \le u_\varepsilon(x,t) \le M, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

Переходя в (3.6) к пределу при $n \to \infty$ и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу, что предельная функция $u_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.4). Следовательно, $u_\varepsilon(x,t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (3.1) в Q_T.

Методом от противного докажем единственность решения задачи (1.1), (1.2), (3.1) в Q_T для малых значений T. Пусть задача (1.1), (1.2), (3.1) имеет по крайней мере два решения $u_\varepsilon(x,t)$ и $v_\varepsilon(x,t)$ в Q_T. Рассуждая, как и ранее, для малых значений T имеем

$$\sup_{Q_T} |u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)| = \sup_{Q_T} \left| \int_0^t \int_\Omega G_N(x,\xi;t-\tau) c(y,\tau) (u_\varepsilon^p(\xi,\tau) - v_\varepsilon^p(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau) \int_\Omega k(\xi,y,\tau)(u_\varepsilon^l(y,\tau) - v_\varepsilon^l(y,\tau))\, dy\, dS_\xi\, d\tau \right| \le$$

$$\le \sup_{Q_T} \Big(p\theta_1^{p-1}(x,t)\nu(t) + l\theta_2^{l-1}(x,t)\mu(t) \Big) \sup_{Q_T} |u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)| \le$$

$$\le \alpha \sup_{Q_T} |u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)|,$$

где $\theta_i(x,t),\ i = 1, 2,$ — положительные непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции и $0 < \alpha < 1$. Очевидно, $u_\varepsilon(x,t) = v_\varepsilon(x,t)$ в Q_T.

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Для некоторого* $T > 0$ *задача* (1.1) – (1.3) *имеет максимальное решение в* Q_T.

Доказательство. Пусть u_ε — решение задачи (1.1), (1.2), (3.1). Легко видеть, что u_ε является верхним решением задачи (1.1) – (1.3). По теореме 2.2 при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ выполняется неравенство $u_{\varepsilon_1} \le u_{\varepsilon_2}$. Согласно теореме Дини (см. [18]) для некоторого $T > 0$ последовательность $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ сходится равномерно в $\overline{Q}_T$ при $\varepsilon \to 0$ к некоторой функции $u(x,t)$. Переходя в (3.4) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u(x,t) = \int_\Omega G_N(x,y;t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_\Omega G_N(x,y;t-\tau) c(y,\tau) u^p(y,\tau)\, dy\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,\xi;t-\tau)\int_\Omega k(\xi,y,\tau)u^l(y,\tau)\,dy\,dS_\xi\,d\tau.$$

Следовательно, $u(x,t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3) в Q_T. Несложно показать, что $u(x,t)$ является максимальным решением задачи (1.1)–(1.3) в Q_T.

Теорема 3.2 доказана.

4. Единственность и неединственность. В данном пункте будем использовать некоторые рассуждения из [5, 13].

Теорема 4.1. *Пусть* $u_0(x)\equiv 0$ *в* Ω *и* $u(x,t)$ *— максимальное решение задачи* (1.1)–(1.3) *в* Q_T. *Предположим, что для некоторого* $t_0\in[0,T)$ *выполняется хотя бы одно из двух условий*:

$$0<p<1 \text{ и } c(x_0,t_0)>0 \text{ для некоторого } x_0\in\Omega, \tag{4.1}$$

$$0<l<1 \text{ и } k(x,y_0,t_0)>0 \text{ для любого } x\in\partial\Omega \text{ и некоторого } y_0\in\partial\Omega. \tag{4.2}$$

Тогда максимальное решение $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *нетривиально в* Q_T.

Доказательство. Пусть выполнено (4.1). В силу непрерывности функции $c(x,t)$ существуют окрестность $U(x_0)$ точки x_0 в Ω и константа $T_1\in(t_0,T)$ такие, что $c(x,t)\ge c_0>0,\ x\in\in U(x_0),\ t\in[t_0,T_1]$. Введем в рассмотрение вспомогательную задачу

$$\begin{aligned}
&u_t=\Delta u+c(x,t)u^p, \qquad x\in U(x_0),\quad t_0<t<T_1,\\
&u(x,t)=0, \qquad x\in\partial U(x_0),\quad t_0<t<T_1,\\
&u(x,t_0)=0, \qquad x\in U(x_0).
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Построим нижнее решение задачи (4.3). Пусть $\underline{u}(x,t)=C(t-t_0)^{\frac{1}{1-p}}w(x,t)$, где C — некоторая положительная константа и $w(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned}
&w_t=\Delta w, \qquad x\in U(x_0),\quad t_0<t<T_1,\\
&w(x,t)=0, \qquad x\in\partial U(x_0),\quad t_0<t<T_1,\\
&w(x,t_0)=w_0(x), \qquad x\in U(x_0).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь $w_0(x)$ — нетривиальная неотрицательная непрерывная в $\overline{U(x_0)}$ функция, равная нулю на $\partial U(x_0)$. Отметим, что $\underline{u}(x,t)=0$, если $t=t_0$ или $x\in\partial U(x_0)$. В силу сильного принципа максимума $0<w(x,t)<M_0=\sup_{U(x_0)}w_0(x),\ x\in U(x_0),\ t_0<t<T_1$.

Для всех $(x,t)\in U(x_0)\times(t_0,T_1)$ выполнено

$$\underline{u}_t-\Delta\underline{u}-c(x,t)\underline{u}^p=\frac{C}{1-p}(t-t_0)^{\frac{p}{1-p}}w-c(x,t)C^p(t-t_0)^{\frac{p}{1-p}}w^p\le 0,$$

где $C\le M_0^{-1}[c_0(1-p)]^{1/(1-p)}$.

Пусть $u(x,t)$ — максимальное решение задачи (1.1)–(1.3) в Q_T с тривиальным начальным условием. Согласно теореме 3.2 $u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,t)$, где $u_\varepsilon(x,t)$ — положительное верхнее решение задачи (1.1)–(1.3) в Q_T. Легко видеть, что $u_\varepsilon(x,t)$ является верхним решением задачи (4.3). Из принципа сравнения для задачи (4.3) следует, что $u_\varepsilon(x,t) \geq \underline{u}(x,t),\ (x,t) \in \in \overline{U(x_0)} \times [t_0, T_1)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в данном неравенстве, получаем $u(x,t) \geq \geq \underline{u}(x,t),\ (x,t) \in \overline{U(x_0)} \times [t_0, T_1)$. Из (1.2) и сильного принципа максимума заключаем, что максимальное решение $u(x,t) > 0$ для $x \in \overline{\Omega},\ t_0 < t < T_1$.

Пусть выполнено (4.2). Тогда существуют окрестность $V(y_0) \subset \overline{\Omega}$ точки y_0 и константа $T_2 \in (t_0, T)$ такие, что $k(x,y,t) > 0$ при $x \in \partial\Omega,\ y \in V(y_0),\ t_0 \leq t \leq T_2$.

Воспользуемся заменой переменных, использованной в [19]. Пусть $\overline{x} \in \partial\Omega$ и $\widehat{n}(\overline{x})$ — единичная внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $\overline{x}$. Поскольку $\partial\Omega$ — гладкая поверхность, существует такая константа $\delta > 0$, что отображение $\psi\colon \partial\Omega \times [0,\delta] \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $\psi(\overline{x}, s) = \overline{x} + s\widehat{n}(\overline{x})$, определяет новые координаты $(\overline{x}, s)$ в окрестности $\partial\Omega$ в $\overline{\Omega}$. Непосредственными вычислениями можно показать, что оператор Δ в этих координатах, примененный к функции $g(\overline{x}, s) = g(s)$, не зависящей от переменой $\overline{x}$, в точке $(\overline{x}, s)$ вычисляется по формуле

$$\Delta g(\overline{x}, s) = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\overline{x}, s) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{H_j(\overline{x})}{1 - sH_j(\overline{x})} \frac{\partial g}{\partial s}(\overline{x}, s), \tag{4.5}$$

где $H_j(\overline{x})$, $j = 1, \ldots, n-1$, — главные кривизны $\partial\Omega$ в точке $\overline{x}$.

Пусть $\alpha > 1/(1-l),\ 0 < \xi_0 \leq 1$ и $t_0 < T_3 \leq \min(T_2, t_0 + \delta^2)$. В точках множества $Q_{\delta,T_3} = \partial\Omega \times [0,\delta] \times (t_0, T_3)$ с координатами $(\overline{x}, s, t)$ определим функцию

$$\underline{u}(\overline{x}, s, t) = (t - t_0)^\alpha \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}}\right)_+^3,$$

а для точек множества $\overline{\Omega} \times [t_0, T_3) \setminus Q_{\delta,T_3}$ положим $\underline{u}(\overline{x}, s, t) \equiv 0$. Покажем, что $\underline{u}(\overline{x}, s, t)$ — нижнее решение задачи (1.1)–(1.3) в $\Omega \times (t_0, T_4)$ для некоторого $T_4 \in (t_0, T_3)$. Действительно, применяя (4.5), получаем

$$\underline{u}_t(\overline{x}, s, t) - \Delta\underline{u}(\overline{x}, s, t) - c(x,t)\underline{u}^p(\overline{x}, s, t) = \alpha(t - t_0)^{\alpha-1} \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}}\right)_+^3 +$$

$$+\frac{3}{2} s (t - t_0)^{\alpha - 3/2} \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}}\right)_+^2 - 6(t - t_0)^{\alpha-1} \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}}\right)_+ -$$

$$-3(t - t_0)^{\alpha - 1/2} \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t - t_0}}\right)_+^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{H_j(\overline{x})}{1 - sH_j(\overline{x})} - c(x,t)\underline{u}^p(\overline{x}, s, t) \leq 0$$

в $\Omega \times (t_0, T_3)$ для достаточно малых значений ξ_0.

Очевидно, справедливы равенства

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu}(\overline{x}, 0, t) = -\frac{\partial \underline{u}}{\partial s}(\overline{x}, 0, t) = 3(t - t_0)^{\alpha - \frac{1}{2}} \xi_0^2.$$

Для $x \in \partial\Omega$ и достаточно малых значений $t - t_0$ выполнено

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu}(x,t) - \int\limits_\Omega k(x,y,t)\underline{u}^l(y,t)\,dy = 3(t - t_0)^{\alpha - \frac{1}{2}} \xi_0^2 -$$

$$-(t-t_0)^{\alpha l} \int\limits_{\partial\Omega\times[0,\delta]} k(x,(\overline{y},s),t)|J(\overline{y},s)| \left(\xi_0 - \frac{s}{\sqrt{t-t_0}}\right)_+^{3l} d\overline{y}\,ds \le 3(t-t_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}\xi_0^2 -$$

$$-(t-t_0)^{\alpha l+\frac{1}{2}} \int\limits_{\partial\Omega} d\overline{y} \int\limits_0^{\xi_0} k(x,(\overline{y},z\sqrt{t-t_0}),t)|J(\overline{y},z\sqrt{t-t_0})|\,(\xi_0-z)_+^{3l}\,dz \le$$

$$\le 3(t-t_0)^{\alpha-\frac{1}{2}}\xi_0^2 - C(t-t_0)^{\alpha l+\frac{1}{2}} \le 0,$$

где $J(\overline{y},s)$ — якобиан перехода к новым переменным, константа C не зависит от t. Завершение доказательства теоремы такое же, как в первой части теоремы.

Теорема 4.1 доказана.

***Замечание* 4.1.** Пусть выполнены условия теоремы 4.1, но только (4.1) и (4.2) заменены следующими условиями:

$$0 < p < 1 \text{ и } c(x,t) \not\equiv 0 \text{ в } Q_\tau \text{ для любого } \tau > 0 \tag{4.6}$$

и

$$\begin{gathered} 0 < l < 1 \text{ и существуют последовательности } \{t_k\} \text{ и } \{y_k\}, k \in N, \text{ такие, что} \\ t_k > 0,\ \lim_{k\to\infty} t_k = 0,\ y_k \in \partial\Omega,\ k(x,y_k,t_k) > 0 \text{ для любого } x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Тогда максимальное решение задачи (1.1)–(1.3) положительно в $Q_T \cup S_T$.

***Следствие* 4.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *но только* (4.1) *и* (4.2) *заменены на* (4.6) *и* (4.7), *и*

$$c(x,t) \text{ и } k(x,y,t) \text{ не убывают по } t \in [0,\overline{t}] \text{ для некоторого } \overline{t} \in (0,T). \tag{4.8}$$

Тогда существует только одно положительное решение задачи (1.1)–(1.3) *в* $Q_T \cup S_T$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — максимальное решение задачи (1.1)–(1.3) с $u_0(x) \equiv 0$ в Ω. Из замечания 4.1 следует неравенство $u(x,t) > 0$ при $(x,t) \in Q_T \cup S_T$. Предположим, что существует другое положительное в $Q_T \cup S_T$ решение $v(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) с тривиальным начальным условием. В силу (4.8) $v(x,t+\tau)$ — положительное верхнее решение задачи (1.1)–(1.3) в $Q_{\overline{t}-\tau}$ для $\tau \in (0,\overline{t})$. Из теоремы 2.2 следует, что $u(x,t) \le v(x,t+\tau)$ при $(x,t) \in Q_{\overline{t}-\tau} \cup \Gamma_{\overline{t}-\tau}$. Переходя к пределу при $\tau \to 0$, имеем $u(x,t) \le v(x,t)$ для $(x,t) \in Q_{\overline{t}} \cup \Gamma_{\overline{t}}$. В силу определения 2.2 и теоремы 2.3 получаем $v(x,t) = u(x,t)$ для всех $(x,t) \in Q_T \cup S_T$.

Следствие 4.1 доказано.

Теорема 4.2. *Пусть* $\min(p,l) < 1,\ u_0 \not\equiv 0$, *выполнено* (4.8) *и хотя бы одно из условий* (4.6), (4.7). *Тогда решение задачи* (1.1)–(1.3) *единственно.*

Доказательство. Для доказательства единственности достаточно показать, что если v — решение задачи (1.1)–(1.3), то

$$u(x,t) \le v(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{T_1}, \tag{4.9}$$

где u — максимальное решение задачи (1.1)–(1.3).

Рассмотрим три случая: $0 < l < 1$ и $0 < p \le 1$, $0 < l < 1$ и $p > 1$, $0 < p < 1$ и $l \ge 1$.

Пусть $0 < l < 1$ и $0 < p \leq 1$. Обозначим $z = u - v$, тогда z удовлетворяет задаче

$$
\begin{aligned}
& z_t \leq \Delta z + c(x,t) z^p, \qquad (x,t) \in Q_{T_1}, \\
& \frac{\partial z(x,t)}{\partial \nu} \leq \int\limits_{\Omega} k(x,y,t) z^l(y,t)\,dy, \qquad (x,t) \in S_{T_1}, \\
& z(x,0) \equiv 0, \qquad x \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

В силу следствия 4.1 существует единственное решение h следующей задачи:

$$
\begin{aligned}
& h_t = \Delta h + c(x,t) h^p, \qquad (x,t) \in Q_{T_2}, \\
& \frac{\partial h(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t) h^l(y,t)\,dy, \qquad (x,t) \in S_{T_2}, \\
& h(x,0) \equiv 0, \qquad x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

такое, что $h(x,t) > 0,\ x \in \overline{\Omega},\ 0 < t < T_2$. Пусть $T_3 = \min(T_1, T_2)$. Используя рассуждения из доказательств следствия 4.1 и теоремы 2.2, можно показать, что $h \geq z$ и $u \geq h$. Обозначим $a = h - z$ и воспользуемся неравенством (см., например, [20])

$$
h^q - u^q + v^q \geq (h - u + v)^q,
$$

где $0 < q \leq 1$ и $\max\{h, v\} \leq u \leq h + v$. В результате получим

$$
\begin{aligned}
& a_t \geq \Delta a + c(x,t) a^p, \qquad (x,t) \in Q_{T_3}, \\
& \frac{\partial a(x,t)}{\partial \nu} \geq \int\limits_{\Omega} k(x,y,t) a^l(y,t)\,dy, \qquad (x,t) \in S_{T_3}, \\
& a(x,0) \equiv 0, \qquad x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Покажем, что $a(x,t) > 0$ в Q_{T_3}. Действительно, если предположить противное, то в силу теоремы 2.1 существует такое $\bar{t} \in (0, T_3)$, что $a(x,t) \equiv 0$ в $Q_{\bar{t}}$. Тогда

$$
\int\limits_{\Omega} k(x,y,t)(h^l(y,t) + v^l(y,t))\,dy = \frac{\partial h(x,t)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial z(x,t)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} =
$$

$$
= \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t) u^l(y,t)\,dy = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)(z(y,t) + v(y,t))^l\,dy =
$$

$$
= \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)(h(y,t) + v(y,t))^l\,dy, \qquad (x,t) \in S_{\bar{t}}.
$$

При выполнении условия (4.7) получим противоречие с тем, что $0 < l < 1$, $h(x,t) > 0$ и $v(x,t) > 0$ в $Q_{\bar{t}}$, $k(x, y_k, t_k) > 0$ для любого $x \in \partial\Omega$, некоторых $y_k \in \partial\Omega$, $0 < t_k < \bar{t}$. Если выполнено условие (4.6), то получить противоречие можно другим способом. Действительно,

$$c(x,t)(h+v)^p = c(x,t)(z+v)^p = c(x,t)u^p = u_t - \Delta u = (z+v)_t - \Delta(z+v) =$$

$$= (h+v)_t - \Delta(h+v) = c(x,t)(h^p + v^p), \qquad (x,t) \in Q_{\bar{t}}.$$

Это противоречит тому, что $0 < p < 1$, $h(x,t) > 0$ и $v(x,t) > 0$ в $Q_{\bar{t}}$, $c(x_1, t_1) > 0$ для некоторых $x_1 \in \Omega$, $t_1 \in (0, \bar{t})$.

Поскольку $a(x,t) > 0$ в $Q_{\bar{t}}$, применяя следствие 4.1 и теорему 2.2, заключаем, что $a(x,t) \geq$ $\geq h(x,t)$ в $Q_{\bar{t}} \cup \Gamma_{\bar{t}}$. Таким образом, выполнено неравенство (4.9) для случая $0 < l < 1$ и $0 < p \leq 1$.

Рассмотрим второй случай $0 < l < 1$ и $p > 1$. Легко заметить, что существует такая константа $\beta > 0$, что

$$u^p(x,t) - v^p(x,t) \leq \beta(u(x,t) - v(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_{T_4},$$

где $T_4 < T_2$. Пусть $z = u - v$. Тогда функция z удовлетворяет задаче (4.10) с $p = 1$ и $\beta c(x,t)$ вместо $c(x,t)$. Дальнейшее доказательство такое же, как в первом случае с $p = 1$.

Третий случай рассматривается аналогично.

Теорема 4.2 доказана.

***Замечание* 4.2.** Пусть $u_0 \not\equiv 0$ и при некотором $\tau > 0$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

$$l \geq 1 \quad \text{и} \quad c(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad Q_\tau,$$

$$p \geq 1 \quad \text{и} \quad k(x,y,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \partial\Omega \times Q_\tau,$$

$$c(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad Q_\tau \quad \text{и} \quad k(x,y,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \partial\Omega \times Q_\tau.$$

Тогда в силу теорем 2.1 и 2.3 решение задачи (1.1) – (1.3) единственно.

Литература

1. *Deng K.* Comparison principle for some nonlocal problems // Quart. Appl. Math. – 1992. – **50**, № 3. – P. 517 – 522.
2. *Gladkov A., Guedda M.* Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Nonlinear Anal. – 2011. – **74**, № 13. – P. 4573 – 4580.
3. *Gladkov A., Guedda M.* Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Appl. Anal. – 2012. – **91**, № 12. – P. 2267 – 2276.
4. *Gladkov A., Kim K. I.* Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition // J. Math. Anal. and Appl. – 2008. – **338**. – P. 264 – 273.
5. *Gladkov A., Kim K. I.* Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition // Adv. Math. Sci. Appl. – 2009. – **19**, № 1. – P. 39 – 49.
6. *Gladkov A., Nikitin A.* A reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions // Int. J. Part. Different. Equat. – 2014. – **2014**. – P. 1 – 10.
7. *Liu D., Mu C.* Blow-up properties for a semilinear reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions // Abstrs Appl. Anal. – 2010. – **2010**. – P. 1 – 17.
8. *Pao C. V.* Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions // J. Comput. and Appl. Math. – 1998. – **88**. – P. 225 – 238.

9. *Yin Y.* On nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary condition // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – **185**, № 1. – P. 161 – 174.
10. *Bokes P.* A uniqueness result for a semilinear parabolic system // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **331**. – P. 567 – 584.
11. *Cortazar C., Elgueta M., Rossi J. D.* Uniqueness and non-uniqueness for a system of heat equations with non-linear coupling at the boundary // Nonlinear Anal. – 1999. – **37**, № 2. – P. 257 – 267.
12. *Cortazar C., Elgueta M., Rossi J. D.* Uniqueness and nonuniqueness for the porous medium equation with non linear boundary condition // Different. Integr. Equat. – 2003. – **16**, № 10. – P. 1215 – 1222.
13. *Escobedo M., Herrero M. A.* A semilinear parabolic system in a bounded domain // Ann. mat. pura ed appl. – 1993. – **165**. – P. 315 – 336.
14. *Kordoš M.* On uniqueness for a semilinear parabolic system coupled in an equation and a boundary condition // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **298**. – P. 655 – 666.
15. *Hu B.* Blow-up theories for semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. – 2011. – **2018**. – 127 p.
16. *Kahane C. S.* On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations // Czechoslovak Math. J. – 1983. – **33**, № 108. – P. 262 – 285.
17. *Hu B., Yin H.-M.* Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. – 1996. – **19**, № 14. – P. 1099 – 1120.
18. *Bartle R., Sherbert D.* Introduction to real analysis. – John Wiley & Sons, Inc., 2011. – 402 p.
19. *Cortazar C. M., del Pino M., Elgueta M.* On the short-time behavior of the free boundary of a porous medium equation // Duke Math. J. – 1997. – **87**, № 1. – P. 133 – 149.
20. *Aguirre J., Escobedo M.* A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$: Asymptotic behavior of solutions // Ann. Fac. sci. Toulouse. –1986/87. – **8**. – P. 175 – 203.

Получено 09.02.15