УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩЕ m-ЧЛЕННЕ ТРИГОНОМЕТРИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ МІШАНОЇ ГЛАДКОСТІ З КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА*

We establish the exact-order estimates of the best m-term trigonometric approximation for periodic multivariable functions (with low mixed smoothness) from the Nikol'skii – Besov-type classes.

Получены точные по порядку оценки наилучшего m-членного тригонометрического приближения периодических функций многих переменных (с малой смешанной гладкостью) из классов типа Никольского – Бесова.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$, а $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0; 2\pi)$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, що задовольняють умови

$$\|f\|_p := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Далі будемо розглядати лише ті функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких виконано умову

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) \, dx_j = 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, $l \in \mathbb{N}$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$ при $t_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$, $\Omega(t) = 0$ при $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq C_1 \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$.

Будемо вважати, що функція $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2. \tag{1}$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

* Виконано за часткової підтримки FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2. \tag{2}$$

Будемо говорити, що функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ задовольняє умови (S) та (S_l), якщо вона задовольняє ці умови за кожною змінною $t_j,\ j = 1, \ldots, d$, при фіксованих значеннях інших змінних.

Множину функцій Ω, для яких виконуються умови 1 – 4, а також умови (S) та (S_l), будемо позначати через $\Phi_{\alpha,l}$.

Зазначимо, що з більш детальною інформацією щодо властивостей мішаних модулів неперервності можна ознайомитися в огляді [2].

Далі обмежимось розглядом функцій $\Omega = \Omega(t)$ вигляду

$$\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d),$$

де $\omega(\tau)$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку $l,\ l \in \mathbb{N},\ \omega \in \Phi_{\alpha,l}$.

Для $1 < p < \infty$ простір $MB^{\omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином (див. [3] для $\theta = \infty$ і [4] для $1 \leq \theta < \infty$):

$$MB^{\omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} < \infty \right\}, \tag{3}$$

де

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} := \left(\sum_s \left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-\theta} \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{4}$$

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\infty}} := \sup_s \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})}, \tag{5}$$

а

$$\omega \in \Phi_{\alpha,l}, \quad \|s\|_1 := s_1 + \ldots + s_d, \quad \delta_s(f) := \delta_s(f, x) := (f * \mathcal{D}_{\rho(s)})(x),$$

$$\mathcal{D}_{\rho(s)} := \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}, \quad \rho(s) := \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, d \right\}$$

(знаком $*$ позначено операцію згортки двох функцій, тобто

$$\varphi * g := (\varphi * g)(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(y)\, g(x - y)\, dy$$

для $\varphi,\ g \in L_1(\mathbb{T}^d)$). Зазначимо, що при $1 < q < \infty$ (див., наприклад, [5], гл. 1, § 1)

$$\|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_q \asymp 2^{\|s\|_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right)}. \tag{6}$$

Зауважимо, що для двох невід'ємних величин A та B запис $A \asymp B$ означає, що існує така стала $C > 0$, що $C^{-1}A \leq B \leq CA$. У випадку $B \geq C^{-1}A$ або $B \leq CA$ будемо писати $B \gg A$ або $B \ll A$ відповідно. Сталі $C_j,\ j \in \mathbb{N}$, які зустрічаються й у статті, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, а також від розмірності простору $\mathbb{R}^d$. Але при цьому суттєвим є те, що зазначені сталі $C_j,\ j \in \mathbb{N}$, не залежать від одного позначеного контекстом параметра.

Шкала просторів $MB^{\omega}_{p,\theta}$ є природним узагальненням за гладкісним параметром r шкали просторів Нікольського – Бєсова $MB^{r}_{p,\theta}$, $r = (r_1, \ldots, r_1)$, $r_1 > 0$, періодичних функцій мішаної гладкості (див., наприклад, [6]) і $MB^{\omega}_{p,\theta} \equiv MB^{r}_{p,\theta}$ при $\omega(\tau) = \tau^{r_1}$, $0 < r_1 < l$. Зазначимо, що при $\theta = \infty$ $MB^{r}_{p,\theta}$ — простори Нікольського MH^{r}_{p}, тобто $MB^{r}_{p,\infty} \equiv MH^{r}_{p}$, а також $MB^{\omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\omega}_{p}$.

Поряд з просторами $MB^{\omega}_{p,\theta}$ при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, розглянемо простори $MH^{\omega}_{p,\theta}$, які визначаються таким чином:

$$MH^{\omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} < \infty \right\}, \tag{7}$$

де

$$\|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} := \sup_k \left(\sum_{\|s\|_1 = k} \left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-\theta} \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{8}$$

При $\theta = \infty$ покладемо $MH^{\omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\omega}_{p}$, а $\|f\|_{MH^{\omega}_{p,\infty}} := \|f\|_{MH^{\omega}_{p}}$.

Для означених вище функціональних просторів, згідно з означеннями (3) – (5), (7), (8), мають місце такі вкладення:

$$MB^{\omega}_{p,\theta} \subset MH^{\omega}_{p,\theta} \subset MH^{\omega}_{p}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{9}$$

$$MH^{\omega}_{p,\theta_1} \subset MH^{\omega}_{p,\theta_2}, \quad 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty. \tag{10}$$

Через $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ та $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ будемо позначати одиничні кулі просторів $MB^{\omega}_{p,\theta}$ та $MH^{\omega}_{p,\theta}$ відповідно, тобто

$$\begin{aligned} \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} &:= \left\{ f \in MB^{\omega}_{p,\theta} \colon \|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}, \\ \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} &:= \left\{ f \in MH^{\omega}_{p,\theta} \colon \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Класи $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ при $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, розглядались у роботі [7] з точки зору встановлення для них точних за порядком оцінок певних апроксимативних характеристик, зокрема найкращого m-членного тригонометричного наближення (див. означення (19)). А в роботі [8] для класів $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > \dfrac{1}{p}$ (в означенні (8) „блоки" $\delta_s(f)$ замінюються відповідними двійковими „блоками" ряду Фур'є функції f за тензорною системою Хаара), встановлено точні за порядком оцінки їх найкращого m-членного наближення поліномами за тензорною системою Хаара.

Зазначимо, що у випадку $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ (при $\theta = \infty$ в [3], а при $1 \le \theta < \infty$ в [4]), $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, встановлено порядкову рівність

$$E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{12}$$

де $a_+ := \max\{a; 0\}$,

$$E_{Q_n}(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{t \in \mathcal{T}_{Q_n}} \|f - t\|_q, \tag{13}$$

$$\mathcal{T}_{Q_n} := \left\{ t \colon t = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\mathcal{E}_{Q_n}(F)_q := \sup_{f\in F} \|f - S_{Q_n}(f)\|_q, \tag{14}$$

$$S_{Q_n}(f) := f * \mathcal{D}_{Q_n} := f * \sum_{||s||_1<n} \mathcal{D}_{\rho(s)},$$

$$Q_n := \{k\colon k \in \rho(s), \|s\|_1 < n\}, \tag{15}$$

при цьому

$$\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{16}$$

Згідно з (13) та (14) має місце нерівність

$$E_{Q_n}(F)_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(F)_q. \tag{17}$$

Нехай Θ_m — набір m точок із цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$. Покладемо

$$P(\Theta_m, x) := \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i(n_k,x)}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ розглянемо величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - P(\Theta_m,\cdot)\|_q, \tag{18}$$

яка називається найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції f у метриці простору $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Для функціонального класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f\in F} \sigma_m(f)_q. \tag{19}$$

З детальним оглядом досліджень величин (18) та (19) можна ознайомитись, наприклад, у монографії [9] (гл. III), а також у роботах [10, 11]. Щодо дослідження поведінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ і знаходження їх порядкових оцінок відмітимо роботи [12 – 14]. Точні за порядком оцінки величин (19) для деяких класів періодичних функцій малої гладкості встановлено в [10, 15 – 19].

Мета даної статті полягає у встановленні точних за порядком оцінок величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ (а також $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$) при нерозглянутих раніше співвідношеннях між параметрами ω, p, q, θ, а саме при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деякими $\alpha\colon \alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ та $\gamma\colon \gamma < \dfrac{1}{p}$. Зазначимо, що функція $\omega = \omega(\tau)$, яка міститься в означенні класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ та $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, які ми розглядаємо, характеризує ці класи як такі, що складаються з функцій, що мають узагальнену малу мішану гладкість спеціального вигляду.

Іншою особливістю даної роботи є те, що поведінка $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ характеризується (як, наприклад, у роботі [20]) у термінах величини m, на відміну від робіт [4, 12 – 14, 21 – 23], в яких поведінка досліджуваних там апроксимативних характеристик класів $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ виражалась у термінах величини n, що пов'язана з m співвідношенням $m \asymp \#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наведемо кілька допоміжних тверджень та співвідношень.

Теорема A (Літтлвуда – Пелі [24]). *Нехай $1 < p < \infty$. Існують додатні числа $C_1(p)$, $C_2(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ виконуються співвідношення*

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p. \tag{20}$$

З (20) випливає така нерівність (див., наприклад, [9], гл. I, § 1.1):

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_s \|\delta_s(f)\|_p^{p_*} \right)^{\frac{1}{p_*}}, \tag{21}$$

де $1 < p < \infty$, $p_* = \min\{p; 2\}$.

Лема A [16]. *Нехай $2 < q < \infty$. Для будь-якого тригонометричного полінома $Q(\Theta_N, x)$ і будь-якого $M < N$ знайдеться тригонометричний поліном $P(\Theta_M, x)$ такий, що*

$$\|Q(\Theta_N, \cdot) - P(\Theta_M, \cdot)\|_q \leq C_4\sqrt{NM^{-1}}\|Q(\Theta_N, \cdot)\|_2,$$

причому $\Theta_M \subset \Theta_N$, $C_4 > 0$.

Лема B [25] (гл. I, § 3). *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, тоді*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1(1/p - 1/q)} \right)^q. \tag{22}$$

Також мають місце порядкові рівності

$$\sum_{\|s\|_1 < n} 2^{\varrho\|s\|_1} \asymp 2^{\varrho n} n^{d-1}, \quad \varrho > 0, \tag{23}$$

$$\sum_{\|s\|_1 = n} 1 \asymp n^{d-1}. \tag{24}$$

Далі від функції $\omega(\tau)$, вказуючи $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, будемо вимагати, щоб вона в певних випадках задовольняла умову (S_l) з деяким $\gamma \colon \gamma < \dfrac{1}{p}$, або $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, а тому згідно з (2) має місце нерівність

$$\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\gamma\|s\|_1}} \ll \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}, \quad \|s\|_1 < n_1. \tag{25}$$

Теорема. *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ та $\gamma < \dfrac{1}{p}$. Якщо $1 < \theta \leq \infty$, а $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \max\left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}; \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}\right\}$ та $\gamma < \dfrac{1}{p}$, то*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}\right) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{26}$$

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, а $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ та $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, то

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega\left(m^{-\frac{q}{2}}\right) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{27}$$

Доведення. Розпочнемо із встановлення в (26) та (27) оцінок зверху для класів $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, зважаючи на вкладення (9) та (10).

За заданим $m \in \mathbb{N}$ підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались умови $m > \#Q_n$,

$$m \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{28}$$

Розглянемо спочатку випадок $q \le \theta \le \infty$, тоді $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Побудуємо поліном, який буде реалізувати для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, у вигляді

$$P(\Theta_m) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f) + \sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} P(\Theta_{N_s}), \tag{29}$$

де $P(\Theta_{N_s})$ — поліноми, які наближають „блоки" $\delta_s(f)$ згідно з лемою A, а

$$n_1 = \frac{qn}{2} - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n, \tag{30}$$

$$N_s = \left[2^{n + (\|s\|_1 - n_1)/p}\omega(2^{-\|s\|_1})/\omega(2^{-n_1})\right] + 1. \tag{31}$$

Переконаємося, що поліном $P(\Theta_m)$ містить за порядком не більше ніж m гармонік.

Покажемо спочатку, що

$$\sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right)^{\mu} \ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}\right)^{\mu} n_1^{d-1}, \quad \mu > 0. \tag{32}$$

Дійсно, враховуючи нерівність (25) та співвідношення (23), маємо

$$\sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p}\right)^{\mu} = \sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} \left(\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\gamma\|s\|_1}} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \gamma)}\right)^{\mu} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}\right)^{\mu} \sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} 2^{\mu\|s\|_1\left(\frac{1}{p} - \gamma\right)} \asymp$$

$$\asymp \left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}}\right)^{\mu} 2^{\mu n_1\left(\frac{1}{p} - \gamma\right)} n_1^{d-1} = \left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}\right)^{\mu} n_1^{d-1},$$

що й доводить (32).

Враховуючи (16), (28) та (30) – (32), одержуємо

$$\#\Theta_m = \#Q_n + \sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} N_s \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + \frac{2^{n - n_1/p}}{\omega(2^{-n_1})} \sum_{n \le \|s\|_1 < n_1} \omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1/p} \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + \frac{2^{n - n_1/p}}{\omega(2^{-n_1})}\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p} n_1^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Це підтверджує той факт, що заданий формулою (29) поліном $P(\Theta_m)$ містить за порядком не більше ніж m гармонік.

Беручи до уваги (29), можемо записати

$$\|f-P(\Theta_m)\|_q \le \left\|\sum_{n\le\|s\|_1<n_1}(\delta_s(f)-P(\Theta_{N_s}))\right\|_q + \left\|\sum_{\|s\|_1\ge n_1}\delta_s(f)\right\|_q =: J_1+J_2. \tag{33}$$

Подальше оцінювання двох доданків правої частини (33) розпочнемо з J_2. Для цього покажемо спочатку, що для $1<p<q<\infty$, $1\le\theta<\infty$, $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, має місце оцінка

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{34}$$

У випадку $q<\theta<\infty$ для $f\in\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$, згідно з (22), нерівністю Гельдера, (1), (8), (11) та (24), маємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q = \left\|\sum_{\|s\|_1\ge n}\delta_s(f)\right\|_q \ll \left(\sum_{\|s\|_1\ge n}\left(\|\delta_s(f)\|_p 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{\|s\|_1=j}\left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-1}\|\delta_s(f)\|_p\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{\|s\|_1=j}\left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-\theta}\|\delta_s(f)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{q}{\theta}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{\|s\|_1=j}\left(\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{\theta q}{\theta-q}}\right)^{\frac{\theta-q}{\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\left(\omega(2^{-j})2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^q\left(\sum_{\|s\|_1=j}1\right)^{\frac{\theta-q}{\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\alpha j}}2^{-j(\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\right)^q j^{(d-1)\frac{\theta-q}{\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\left(\sum_{j=n}^{\infty}2^{-jq\left(\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\right)}j^{(d-1)\frac{\theta-q}{\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{35}$$

У випадку $\theta=q$, враховуючи (1), (8), (11) та (22), одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q \ll \left(\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{\|s\|_1=j}\left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-1}\|\delta_s(f)\|_p\,\omega(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\leq \|f\|_{MH^{\omega}_{p,q}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \left(\omega(2^{-j}) 2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-jq\left(\alpha - \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{36}$$

Якщо ж $1 \leq \theta < q$, то внаслідок (10) та (36) отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,q})_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{37}$$

Співставляючи (35) – (37), приходимо до (34).

Враховуючи (12), (28), (30) і (34), одержуємо

$$J_2 \leq \mathcal{E}_{Q_{n_1}}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{q}{2}-1\right)}\right) 2^{\frac{qn}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\left(1-\frac{q}{2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-\frac{q}{2}} \left(\log^{d-1} m\right)^{q-1}\right) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\log^{d-1} m\right)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{38}$$

Використовуючи (21), лему A, нерівність різних метрик Нікольського, (31), нерівність Гельдера, (2), (28) та (30), для $q \leq \theta < \infty$ маємо

$$J_1 \ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < n_1} \|\delta_s(f) - P(\Theta_{N_s})\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < n_1} N_s^{-1} 2^{\|s\|_1} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 < n_1} N_s^{-1} 2^{2\|s\|_1/p} \|\delta_s(f)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \sum_{n \leq \|s\|_1 < n_1} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^2 \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \leq j < n_1} \sum_{\|s\|_1 = j} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^2 \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \leq j < n_1} \left(\sum_{\|s\|_1 = j} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{2}{\theta}} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{\|s\|_1=j} \left(\omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p} \right)^{\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{n\leq j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \left(\sum_{\|s\|_1=j} 1 \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{n\leq j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} j^{(d-1)\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\leq j<n_1} \frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\gamma j}} 2^{-\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)j} j^{(d-1)\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\gamma n_1}} \sum_{n\leq j<n_1} 2^{-\left(\gamma-\frac{1}{p}\right)j} j^{(d-1)\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{(d-1)\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n_1}) 2^{-\frac{n}{2}+\frac{n_1}{p}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)\left(\frac{q}{2}-1\right)} \right) 2^{-\frac{n}{2}+\frac{qn}{2p}} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{q}{2p}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega\left(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1} \right) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\log^{d-1} m \right)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{39}$$

Зауважимо, що у процесі встановлення (39) можна простежити за виконанням співвідношення

$$\sum_{n\leq j<n_1} \left(\omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} \right)^{\vartheta} j^{(d-1)\lambda} \ll \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{\frac{n_1}{p}} \right)^{\vartheta} n_1^{(d-1)\lambda}, \quad \vartheta > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p}$.

Нехай $\theta = \infty$. Тоді, враховуючи (28), (30) та (32), для J_1 маємо

$$J_1 \ll \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \sum_{n\leq\|s\|_1<n_1} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^2 \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{-n+\frac{n_1}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \max_{n\leq\|s\|_1<n_1} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{n\leq\|s\|_1<n_1} \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s|_1/p} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1})2^{-n+\frac{n_1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\infty}} \left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}n_1^{d-1}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1} m)^{q-1}\right) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1} m)^{1+\frac{1-q}{p}}. \tag{41}$$

Таким чином, підставляючи (38), (39), (41) в (33), одержуємо оцінку зверху в (26) для $q \le \theta \le \infty$.

Перейдемо тепер до розгляду випадків $1 < \theta < q$, якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деякими

$$\alpha > \max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}; \frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}\right\} = \frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'} \quad \gamma < \frac{1}{p} \qquad \text{та} \qquad 1 \le \theta < q,$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з деякими $\alpha > \dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, $\gamma < \dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$. Зауважимо, що в першому з розглядуваних випадків, який відповідає встановленню оцінки зверху в (26), більш суттєвою умовою, яку будемо брати до уваги, є $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$. У другому з розглядуваних на даному етапі доведення випадків, який відповідає встановленню оцінки зверху в (27), більш суттєвою умовою, яку будемо брати до уваги, є $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$.

Поліном, що буде реалізувати для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ потрібну оцінку наближення, зобразимо у вигляді

$$P(\Theta_m) = \sum_{||s||_1<n} \delta_s(f) + \sum_{n\le\|s\|_1<n_1} P_1(\Theta_{K_s}) + \sum_{n_1\le k<n_2}\sum_{\|s\|_1=k} P_2(\Theta_{M_{s,k}}), \tag{42}$$

де $P_1(\Theta_{K_s})$, $P_2(\Theta_{M_{s,k}})$ — поліноми, які побудовано у відповідності з „блоками” $\delta_s(f)$ згідно з лемою А і $n_1 = \dfrac{qn}{2} - \left(\dfrac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$,

$$n_2 = \frac{qn}{2} + \frac{q}{2}(d-1)\log n, \tag{43}$$

$$K_s = \left[(\omega(2^{-n_1}))^{-1}2^{n+(\|s\|_1-n_1)/p}n^{\frac{d-1}{\theta}}\|\delta_s(f)\|_p\right]+1, \tag{44}$$

а

$$M_{s,k} = \left[(\omega(2^{-n_1}))^{-1}2^{n_1\left(\frac{q'}{q\theta'}-\frac{1}{p}\right)}\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2\theta'}}2^{\frac{k}{2}}\|\delta_s(f)\|_2\right]+1 \tag{45}$$

у випадку $1 < \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$, та

$$M_{s,k} = \left[(\omega(2^{-n_2}))^{-1}2^{n_2\left(\frac{q'}{q\theta'}-\frac{1}{p}\right)}\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2\theta'}}2^{\frac{k}{2}}\|\delta_s(f)\|_2\right]+1 \tag{46}$$

у випадку $1 \le \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$.

Нижче буде встановлено, що кількість гармонік полінома $P(\Theta_m)$, який задано формулою (42), не перевищує за порядком m.

Покажемо спочатку, що для $f \in \mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ має місце співвідношення

$$\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} \|\delta_s(f)\|_p 2^{\|s\|_1/p} \ll \omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}n_1^{\frac{d-1}{\theta'}}, \tag{47}$$

яке буде потрібне для проведення подальших міркувань.

Дійсно, використовуючи нерівність Гельдера, співвідношення (24) та (40), при $1 < \theta < q$ маємо

$$\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} \|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1/p} =$$

$$= \sum_{n\le j<n_1} \sum_{\|s\|_1=j} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \, \omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p} \le$$

$$\le \sum_{n\le j<n_1} \left(\sum_{\|s\|_1=j} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1=j} \left(\omega(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1/p}\right)^{\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \le$$

$$\le \|f\|_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} \left(\sum_{\|s\|_1=j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} j^{\frac{d-1}{\theta'}} \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}}.$$

Відповідна оцінка при $\theta = 1$, з урахуванням (40), має вигляд

$$\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} \|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1/p} =$$

$$= \sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \sum_{\|s\|_1=j} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \le$$

$$\le \|f\|_{MH^{\omega}_{p,1}} \sum_{n\le j<n_1} \omega(2^{-j}) 2^{j/p} \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p}.$$

Покажемо, що кількість гармонік полінома $\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} P_1(\Theta_{K_s})$ не перевищує за порядком m. Враховуючи (24), (28), (44) та (47), одержуємо

$$\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} K_s \ll n_1^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n\le\|s\|_1<n_1} \|\delta_s(f)\|_p \, 2^{\|s\|_1/p} \ll$$

$$\ll n_1^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n-n_1/p} n^{\frac{d-1}{\theta}} \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1/p} n_1^{\frac{d-1}{\theta'}} \ll 2^n n^{d-1} \asymp m. \tag{48}$$

Тепер перейдемо до встановлення оцінки зверху величини $\|f - P(\Theta_m)\|_q$. Маємо

$$\|f - P(\Theta_m)\|_q \le \left\| \sum_{n\le\|s\|_1<n_1} (\delta_s(f) - P_1(\Theta_{K_s})) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{n_1\le k<n_2} \sum_{\|s\|_1=k} (\delta_s(f) - P_2(\Theta_{M_{s,k}})) \right\|_q + \left\| \sum_{\|s\|_1\ge n_2} \delta_s(f) \right\|_q =:$$

$$=: J_3 + J_4 + J_5. \tag{49}$$

Оцінимо послідовно кожну із величин $J_3,\ J_4$ та J_5 в (49). Враховуючи (21), лему A, (28), (30) та (47), як і при оцінюванні J_1, отримуємо

$$J_3 \ll \left(\sum_{n\le\|s\|_1<n_1} K_s^{-1} 2^{2\|s\|_1/p}\|\delta_s(f)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left((\omega(2^{-n_1}))^{-1}2^{n-n_1/p}n^{\frac{d-1}{\theta}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\le\|s\|_1<n_1}\|\delta_s(f)\|_p\,2^{\|s\|_1/p}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left((\omega(2^{-n_1}))^{-1}2^{n-n_1/p}n^{\frac{d-1}{\theta}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\omega(2^{-n_1})2^{n_1/p}n_1^{\frac{d-1}{\theta'}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n_1})2^{-\frac{n}{2}+\frac{n_1}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{50}$$

Покажемо, що $J_3 \ll \omega(m^{-\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$ у випадку $1\le\theta<q,\ \omega\in\Phi_{\alpha,l},\ \alpha>\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q},$ $\gamma<\dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$. Дійсно, враховуючи (50), умову (2) для $\omega\in\Phi_{\alpha,l},\ \gamma<\dfrac{1}{p}-\dfrac{q'}{q\theta'}$, маємо

$$J_3 \ll \frac{\omega(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1})}{\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1}\right)^{\gamma}}\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1}\right)^{\gamma}m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(m^{-\frac{q}{2}})}{\left(m^{-\frac{q}{2}}\right)^{\gamma}}\left(m^{-\frac{q}{2}}(\log^{d-1}m)^{q-1}\right)^{\gamma}m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} <$$

$$< \omega(m^{-\frac{q}{2}})\left(\log^{d-1}m\right)^{(q-1)(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log^{d-1}m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}} =$$

$$= \omega(m^{-\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{51}$$

Переходячи до оцінювання доданка J_4, попередньо виконаємо дії, які спрямовані на опис побудови поліномів $P_2(\Theta_{M_{s,k}})$ для $k\in\mathbb{N},\ n_1\le k<n_2$ та $s\colon \|s\|_1=k$. Кожному числу $k\in\mathbb{N}$, $k\in[n_1,n_2)$, поставимо у відповідність числа

$$S_k = \left(\sum_{\|s\|_1=k}\left((\omega(2^{-\|s\|_1}))^{-1}\|\delta_s(f)\|_p\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{52}$$

$$m_k = \left[2^{-\frac{kq'}{q}}S_k^{\theta}\left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2}}\right]+1. \tag{53}$$

Нехай

$$\sum_{\|s\|_1=k}\delta_s(f) = {\sum_{\|s\|_1=k}}'\delta_s(f) + {\sum_{\|s\|_1=k}}''\delta_s(f), \tag{54}$$

де перша сума у правій частині (54) містить m_k „блоків” $\delta_s(f)$ за тими векторами s, яким відповідають найбільші значення норм $\|\delta_s(f)\|_p$, а друга — решту „блоків” $\delta_s(f)$. Поліноми $P_2(\Theta_{M_{s,k}})$ будемо будувати у відповідності з лемою А, але тільки для тих блоків $\delta_s(f)$, що містяться під знаком першої суми у правій частині (54).

Таким чином, згідно з прийнятими позначеннями можемо записати

$$J_4 \leq \left\| \sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{||s||_1 = k}{}' (\delta_s(f) - P_2(\Theta_{M_{s,k}})) \right\|_q + \left\| \sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{||s||_1 = k}{}'' \delta_s(f) \right\|_q =: I_1 + I_2. \qquad (55)$$

Для того щоб проводити подальші оцінювання, а також, щоб переконатись у тому, що кількість гармонік полінома $\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k} P_2(\Theta_{M_{s,k}})$ не перевищує за порядком m, покажемо спочатку, що виконуються співвідношення

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \qquad (56)$$

для $1 < \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, та

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{||s||_1 = k}{}' ||\delta_s(f)||_2 \ll \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \qquad (57)$$

для $1 \leq \theta < q$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$.

Використовуючи нерівності різних метрик Нікольського та Гельдера, а також враховуючи (52), (53) та той факт, що $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, одержуємо

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \ll \sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{p}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_p =$$

$$= \sum_{n_1 \leq k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' (\omega(2^{-\|s\|_1}))^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{n_1 \leq k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} \left(\sum_{\|s\|_1 = k}{}' \left((\omega(2^{-||s||_1}))^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1 = k}{}' 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}} \leq$$

$$\leq \sum_{n_1 \leq k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{\frac{k}{p}} S_k m_k^{\frac{1}{\theta'}} \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} S_k^{1 + \frac{\theta}{\theta'}} =$$

$$= \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\alpha k}} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} S_k^{\theta} \leq$$

$$\leq \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \|f\|^{\theta}_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\alpha k}} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\alpha n_1}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{-k(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \asymp$$

$$\asymp \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_1})}{2^{-\alpha n_1}} 2^{-n_1(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} = \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}}. \tag{58}$$

Як і при встановленні (58), беручи до уваги той факт, що $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, з (58) маємо

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} \omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} S_k^{\theta} \leq$$

$$\leq \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \|f\|^{\theta}_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} \frac{\omega(2^{-k})}{2^{-\gamma k}} 2^{-k(\gamma - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}} \frac{\omega(2^{-n_2})}{2^{-\gamma n_2}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{-k(\gamma - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2\theta'}}. \tag{59}$$

Зауважимо, що у процесі встановлення оцінок (58) та (59) можна простежити, що мають місце співвідношення

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q S_k^{\theta} \ll \left(\omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q, \tag{60}$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$, та

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q S_k^{\theta} \ll \left(\omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'})}\right)^q, \tag{61}$$

якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 \leq \theta < q$.

Переконаємось тепер, що кількість гармонік полінома $\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k} P_2(\Theta_{M_{s,k}})$ не перевищує за порядком m. Беручи до уваги (28), (43), (45) та (56), одержуємо

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' M_{s,k} \ll$$

$$\ll n_2^d + (\omega(2^{-n_1}))^{-1} 2^{n_1(\frac{q'}{q\theta'} - \frac{1}{p})} (2^n n^{d-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} \sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \ll$$

$$\ll n_2^d + 2^n n^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m \tag{62}$$

у випадку $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$.

Аналогічно, беручи до уваги (28), (43), (46) та (57), маємо

$$\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' M_{s,k} \ll m \tag{63}$$

у випадку $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 \leq \theta < q$.

Таким чином, враховуючи (16), (28), (48), (62), (63), переконуємося, що кількість гармонік побудованого полінома $P(\Theta_m)$, який задано формулою (42), не перевищує за порядком m.

Для випадку $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$, згідно з (21), лемою А, співвідношеннями (28), (30), (45) і (56), можемо записати

$$I_1 \leq \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f) - P_2(\Theta_{M_{s,k}})\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' M_{s,k}^{-1} 2^{\|s\|_1} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_1})\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n_1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right)} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{4\theta'} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1\left(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right)} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2\theta'} - \frac{1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) 2^{\frac{qn}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left((1-\frac{q}{2})(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) + \frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'} - \frac{q-1}{p}}. \tag{64}$$

Якщо ж $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 \leq \theta < q$, то згідно з (21), лемою А, співвідношеннями (28), (43), (46) і (57), як і при встановленні (64), отримуємо

$$I_1 \leq \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f) - P_2(\Theta_{M_{s,k}})\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\omega(2^{-n_2})\right)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n_2}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right)} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{4\theta'} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{\|s\|_1 = k}{}' \|\delta_s(f)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2\left(\frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right)} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2\theta'} - \frac{1}{2}} =$$

$$= \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}} \right) (2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}. \tag{65}$$

Перейдемо до оцінювання доданка I_2. Згідно з нерівністю (22) маємо

$$I_2 = \left\| \sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}'' \delta_s(f) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n_1 \leq k < n_2} \sum_{\|s\|_1 = k}{}'' \left(2^{\|s'\|_1\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|\delta_s(f)\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \sum_{\|s\|_1=k}{}'' \|\delta_s(f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} := I_3. \tag{66}$$

Далі, пронумеруємо величини $\|\delta_s(f)\|_p$, що містяться в I_3, для кожного k, $n_1 \le k < n_2$, розташувавши їх у порядку спадання і позначивши їх через $a_i(f,k)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тоді, беручи до уваги означення (52), можемо записати

$$a_i(f,k) \ll k^{-\frac{1}{\theta}} \omega(2^{-k}) S_k. \tag{67}$$

Використовуючи співвідношення (67) та враховуючи (28), (30), (52), (53) і (60), одержуємо

$$I_3 = \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \sum_{i > m_k} a_i^{q-\theta}(f,k) a_i^{\theta}(f,k) \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q-\theta} S_k^{q-\theta} \sum_{i > m_k} i^{-\frac{q-\theta}{\theta}} a_i^{\theta}(f,k) \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q-\theta} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \sum_{i > m_k} (\omega(2^{-k}))^{-\theta} a_i^{\theta}(f,k) \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q-\theta} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \sum_{\|s\|_1=k} \left(\left(\omega(2^{-\|s\|_1}) \right)^{-1} \|\delta_s(f)\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{q} m_k^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} (\omega(2^{-k}))^{q} S_k^{\theta} \left(2^{-\frac{kq'}{q}} \left(2^n n^{d-1} \right)^{\frac{q'}{2}} \right)^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(2^n n^{d-1} \right)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} \right)^{q} S_k^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1} \right)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \omega(2^{-n_1}) 2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}-\frac{q-1}{p}} \tag{68}$$

у випадку $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 < \theta < q$.

Якщо ж $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, $1 \le \theta < q$, то, як і при встановленні (68), враховуючи (28), (43) і (61), з (68) отримуємо

$$I_3 \ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \left(\sum_{n_1 \le k < n_2} \left(\omega(2^{-k}) 2^{k(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})}\right)^q S_k^\theta\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{(\theta-q)q'}{2q\theta}} \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'})} = \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}}\right) (2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{69}$$

Нарешті перейдемо до оцінювання останнього доданка у правій частині (49). Згідно з (28), (34), (37) та (43), одержуємо

$$J_5 \le \mathcal{E}_{Q_{n_2}}(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \omega\left(\left(2^n n^{d-1}\right)^{-\frac{q}{2}}\right) (2^n n^{d-1})^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{70}$$

З іншого боку, згідно з (1), (34), (43), враховуючи умову $\omega \in \Phi_{\alpha,l},\ \alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'},\ 1 < \theta < q$, та (28), маємо

$$J_5 \le \mathcal{E}_{Q_{n_2}}(\mathbf{MH}^\omega_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n_2}) 2^{n_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}})}{\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^\alpha} \left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^\alpha 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)})}{\left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}\right)^\alpha} \left(2^{-\frac{qn}{2}} n^{-(d-1)\frac{q}{2}}\right)^\alpha 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} <$$

$$< \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) (n^{(d-1)(1-q)})^{\frac{1}{p}-\frac{q'}{q\theta'}} 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{q}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-\frac{qn}{2}} n^{(d-1)(\frac{q}{2}-1)}) 2^{\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)((\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(1-\frac{q}{2})+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}. \tag{71}$$

Насамкінець, підставляючи (68) у (66), потім (64), (66) у (55) і, нарешті, (50), (55) та (71) у (49), одержуємо оцінку зверху в (26) для $1 < \theta < q,\ \omega \in \Phi_{\alpha,l},\ \alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'},\ \gamma < \dfrac{1}{p}$.

У випадку $1 \le \theta < q,\ \omega \in \Phi_{\alpha,l},\ \alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q},\ \gamma < \dfrac{1}{p} - \dfrac{q'}{q\theta'}$, підставляючи (70) у (66), потім (65), (66) у (55) і, на завершення, (51), (55) та (70) у (49), отримуємо оцінку зверху в (27).

Таким чином, оцінки зверху в (26) та (27) встановлено.

Тепер перейдемо до встановлення у (26) та (27) відповідних оцінок знизу, які, враховуючи вкладення (9), будемо проводити для класів $\mathbf{MB}^\omega_{p,\theta}$. Для цього скористаємося співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [26], гл. I, § 1.4, п. 2)

$$\sigma_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \sup_{\substack{P \in L^\perp(\Theta_m) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{P(x)}\, dx \right|, \tag{72}$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, ортогональних підпростору тригонометричних поліномів з „номерами” гармонік з множини Θ_m.

Спочатку встановимо оцінку знизу в (26). Для цього покладемо

$$j_1 = \frac{q}{2}\log m - (q-1)(d-1)\log\log m \tag{73}$$

і побудуємо функцію P_1, що задовольняє умови $P_1 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $\|P_1\|_{q'} \le 1$.

Нехай

$$v_1 = \sum_{\|s\|_1=j_1} \mathcal{D}_{\rho(s)}(x) = \sum_{\|s\|_1=j_1}\sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)},$$

а Θ_m — довільна множина векторів $k=(k_1,\ldots,k_d)$ з $\mathbb{Z}^d$ така, що $\#\Theta_m = m$.

Позначимо

$$u_1 = \sum_{k\in\Theta_m\cap\{k:k\in\rho(s),\ \|s\|_1=j_1\}} e^{i(k,x)}$$

і покладемо

$$w_1 = v_1 - u_1. \tag{74}$$

Оцінимо $\|v_1\|_{q'}$ та $\|u_1\|_{q'}$ для $1<q'<2$. Згідно з (21) та співвідношеннями (6), (23) маємо

$$\|v_1\|_{q'} \ll \left(\sum_{\|s\|_1=j_1} \|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_{q'}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \asymp \left(\sum_{\|s\|_1=j_1} 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{q'})q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{j_1}{q}} j_1^{\frac{d-1}{q'}}, \tag{75}$$

а враховуючи (73), для $\|u_1\|_{q'}$ одержуємо

$$\|u_1\|_{q'} \le \|u_1\|_2 \le \sqrt{m} \asymp 2^{\frac{j_1}{q}} j_1^{\frac{d-1}{q'}}. \tag{76}$$

Тоді, беручи до уваги (74) – (76), робимо висновок, що функція

$$P_1 = C_5\, 2^{-\frac{j_1}{q}}\, j_1^{-\frac{d-1}{q'}}\, w_1 \tag{77}$$

задовольняє умови $P_1 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $\|P_1\|_{q'} \le 1$ при деякому значенні $C_5 > 0$.

Покажемо тепер, що функція

$$g_1 = C_6\omega(2^{-j_1})2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} v_1 = C_6\omega(2^{-j_1})2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|s\|_1=j_1} \mathcal{D}_{\rho(s)}(x) \tag{78}$$

при деякому значенні $C_6 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$. Враховуючи (3) – (5), а також (6), маємо

$$\|g_1\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{\|s\|_1=j_1} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{-\theta} \|\delta_s(g_1)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= C_6 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1=j_1} \|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} j_1^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1=j_1} 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1 \tag{79}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ та

$$\|g_1\|_{MB^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s\colon \|s\|_1=j_1} \frac{\|\delta_s(g_1)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = C_6 2^{-j_1(1-\frac{1}{p})} \sup_{s\colon \|s\|_1=j_1} \|\mathcal{D}_{\rho(s)}\|_p \ll 1 \tag{80}$$

при $\theta = \infty$.

Таким чином, з (79), (80) випливає, що $g_1 \in \mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ при деякому значенні $C_6 > 0$.

Тепер, беручи до уваги (15), (16), (72), (73), (77) та (78), маємо

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \geq \sigma_m(g_1)_q \geq \inf_{\Theta_m} \left| (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} g_1(x)\overline{P_1(x)}dx \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} \inf_{\Theta_m} (\|v_1\|_2^2 - \|u_1\|_2^2) =$$

$$= \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} \inf_{\Theta_m} \left\| \sum_{k \in Q_{j_1+1} \setminus Q_{j_1} \setminus \Theta_m} e^{i(k,\cdot)} \right\|_2^2 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_1}) 2^{-j_1(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1)} (2^{j_1} j_1^{d-1} - m) \asymp \omega(2^{-j_1}) 2^{j_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} j_1^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}} (\log^{d-1} m)^{q-1}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log^{d-1} m)^{\frac{1}{\theta'}+\frac{1-q}{p}}.$$

Оцінку знизу в (26) встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (27). Для цього покладемо

$$j_2 = \frac{q}{2} \log m \tag{81}$$

та запишемо функцію P_2, що задовольняє умови $P_2 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ та $\|P_2\|_{q'} \leq 1$, у вигляді

$$P_2 = C_7 2^{-\frac{j_2}{q}} (v_2 - u_2), \tag{82}$$

де

$$v_2 = \mathcal{D}_{\rho(s^*)}(x), \tag{83}$$

$$u_2 = \sum_{k \in \Theta_m \cap \rho(s^*)} e^{i(k,x)}, \tag{84}$$

а Θ_m — довільна множина векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ з $\mathbb{Z}^d$ така, що $\#\Theta_m = m$ і $s^*\colon \|s^*\|_1 = j_2$.

В якості екстремальної розглянемо функцію

$$g_2 = C_8 \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p})} v_2 = C_8 \omega(2^{-j_2}) 2^{-j_2(1-\frac{1}{p})} \mathcal{D}_{\rho(s^*)}(x), \quad C_8 > 0, \tag{85}$$

яка при деякому значенні $C_8 > 0$ належить до класу $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$.

Далі, враховуючи (72), (81) – (85), маємо

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \geq \sigma_m(g_2)_q \geq \inf_{\Theta_m} \left| (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} g_2(x)\overline{P_2(x)}dx \right| \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_2})2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \inf_{\Theta_m}(\|v_2 - u_2\|_2^2) = \omega(2^{-j_2})2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \inf_{\Theta_m} \left\| \sum_{k\in\rho(s^*)\setminus\Theta_m} e^{i(k,\cdot)} \right\|_2^2 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-j_2})2^{-j_2(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}(2^{j_2} - m) \asymp \omega(2^{-j_2})2^{j_2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу в (27) встановлено.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** При $\omega(\tau) = \tau^r$, де $\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}\right\} < r < \frac{1}{p}$, $1 < \theta \leq \infty$, або $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, $1 \leq \theta < q$, теорему для класів $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ встановив А. С. Романюк [17], а для класів $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ (при таких же обмеженнях на параметр r) теорема є новою.

2. Якщо $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то має місце оцінка

$$E_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{86}$$

яка випливає з (12) та (34) з урахуванням вкладень (9) та нерівності (17).

3. Порівнюючи при $m \asymp 2^n n^{d-1}$ оцінки (12) та (86) з (26), (27), бачимо, що при умовах доведеної теореми оцінки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $\sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$ є кращими за порядком, ніж оцінки $E_{Q_n}(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ та $E_{Q_n}(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q$.

Автор висловлює щиру вдячність проф. Романюку А. С. за обговорення результатів статті та зроблені ним корисні зауваження, які посприяли покращенню викладу матеріалу.

Література

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. Yu.* Mixed moduli of smoothness in L_p: a survey // Surv. Approxim. Theory. – 2013. – **8**. – P. 1 – 57.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
4. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
5. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci., 1993. – 419 p.
6. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
7. *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. – 2015. – **206**, № 11. – С. 131 – 160.
8. *Стасюк С. А.* Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2015. – **21**, № 4. – С. 251 – 260.
9. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.

10. *Stasyuk S. A.* Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii – Besov classes for small smoothness // J. Approxim. Theory. – 2014. – **177**. – P. 1 – 16.
11. *Dinh Dung, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation // arXiv: 1601.03978v1 [math.NA] 15 Jan 2016. – P. 1 – 154.
12. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 381 – 394.
13. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1551 – 1559.
14. *Конограй А. Ф., Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 9. – С. 1206 – 1224.
15. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132(174)**, № 1. – С. 20 – 27.
16. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на класах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Яросл. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
17. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
18. *Стасюк С. А.* Наилучшее m-членное тригонометрическое приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ функций малой гладкости // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 104 – 111.
19. *Temlyakov V. N.* Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // arXiv: 1503.00282v1 [math.NA] 1 Mar 2015. – P. 1 – 30.
20. *Стасюк С. А.* Приближение функций многих переменных классов H^{Ω}_{p} полиномами по системе Хаара // Anal. Math. – 2009. – **35**, № 4. – P. 257 – 271.
21. *Стасюк С. А.* Тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 700 – 705.
22. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
23. *Duan L.* The best m-term approximations on generalized Besov classes $MB^{\Omega}_{q,\theta}$ with regard to orthogonal dictionaries // J. Approxim. Theory. – 2010. – **162**. – P. 1964 – 1981.
24. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
25. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 113 с.
26. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987.

Одержано 16.04.15