

ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. II

We propose the L^2 -version of Laplacian with respect to measure on an (infinite-dimensional) Riemannian manifold. The Dirichlet problem for equations with proposed Laplacian is solved in a part of the Riemannian manifold of a certain class.

Запропоновано L^2 -версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Розв'язується задача Діріхле для рівнянь з уведеним лапласіаном в області ріманового многовиду певного класу.

Данная работа является продолжением работы [1]. Кратко напомним основные понятия. \mathcal{M} — сепарабельное риманово многообразии класса C^2 , модельное пространство которого представляет собой (сепарабельное) гильбертово пространство H ($\dim H \leq \infty$). \mathcal{M} предполагается полным относительно внутренней метрики. На \mathcal{M} задана конечная неотрицательная борелевская мера σ , носитель которой предполагается полным.

На \mathcal{M} корректно вводятся следующие пространства: $C_b(\mathcal{M})$ (соответственно $C_{b,v}(\mathcal{M})$) — всех ограниченных непрерывных функций (соответственно векторных полей), $C_b^1(\mathcal{M})$ (соответственно $C_{b,v}^1(\mathcal{M})$) — всех ограниченных непрерывно дифференцируемых функций (соответственно векторных полей) с ограниченной производной. Если G — область в \mathcal{M} , то через $C^1(G)$ обозначаем семейство всех функций на \overline{G} , допускающих продолжение на все \mathcal{M} до функций класса $C_b^1(\mathcal{M})$. Аналогично введены $C(G)$, $C_v^1(G)$. Корректно введены и пространства $L_v^2(\mathcal{M}) = L_v^2(\mathcal{M}, \sigma)$ и $L_v^2(G)$ интегрируемых с квадратом векторных полей на \mathcal{M} и в G . Аналогично — $L_v^p(\mathcal{M})$; $L_v^p(G)$.

Пусть G — ограниченная область в \mathcal{M} , граница которой $S = \partial G$ — гладкое вложенное в \mathcal{M} подмногообразии коразмерности 1 — согласована с мерой σ , т. е. мера σ дифференцируема (по Фомину) вдоль поля $\mathbf{n} \in C_{b,v}^1(\mathcal{M})$ (\mathbf{n} — продолжение поля единичной нормали к S). В этом случае на S корректно определена ассоциированная с σ поверхностная мера τ [2–4].

Оператор $\mathbf{grad}_G : L^2(G) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad} u \in L_v^2(G)$ плотно определен. В случае, когда $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$ и оператор \mathbf{grad}_G допускает замыкание, корректно определен (ограниченный) оператор следа $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}) \rightarrow L^2(S) = L^2(S, \tau)$, совпадающий на $C^1(G)$ с оператором ограничения: $u \mapsto u|_S$ [2, 4].

Операторы $\operatorname{div}_G : L_v^2(G) \rightarrow L^2(G)$ и $\Delta_G : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ определены формулами

$$\operatorname{div}_G = - \left(\overline{\mathbf{grad}_G} \Big|_{\operatorname{Ker} \gamma} \right)^*, \quad \Delta_G = \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}_G}.$$

3. Задача Дирихле. Рассмотрим пример задачи Дирихле для уравнения с лапласианом по мере в ограниченной области на римановом многообразии. Подобная задача в классическом конечномерном случае приведена, например, в [5], а в случае гильбертова пространства исследуется в работе [6].

Далее предполагаем выполнение следующих условий:

а) векторное поле \mathbf{n} является полным и мера σ дифференцируема вдоль поля \mathbf{n} (согласование S и σ);

б) $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$;

в) оператор \mathbf{grad}_G замыкаем.

Выполнение этих условий позволяет корректно ввести операторы $\overline{\mathbf{grad}}_G$, Δ_G , а также оператор следа $\gamma: L^2(G) \rightarrow L^2(S)$ с областью определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$.

Пусть $a(\cdot) \in C(G)$, $a(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \overline{G}$, $f \in L^2(G)$, $\varphi \in \gamma(\mathcal{D}(\Delta_G))$. Рассмотрим задачу поиска функции $u \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, удовлетворяющую в G уравнению

$$\Delta_G u - a \cdot u = f \quad (1)$$

и краевому условию

$$\gamma(u) = \varphi. \quad (2)$$

Поставленная задача решается по классической схеме.

Сначала рассмотрим случай $\varphi = 0$. Поскольку $C_0^1(G)$ плотно в $L^2(G)$ и $\operatorname{Ker} \gamma \supset C_0^1(G)$, функция u является решением задачи (1), (2) с $\varphi = 0$ в том и только в том случае, когда $u \in \operatorname{Ker} \gamma$ и для всех $v \in \operatorname{Ker} \gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\int_G v(\Delta_G u - a \cdot u) d\sigma = \int_G v f d\sigma$$

или, что эквивалентно, уравнению

$$\int_G ((\overline{\mathbf{grad}}_G u, \overline{\mathbf{grad}}_G v) + auv) d\sigma = - \int_G v f d\sigma. \quad (3)$$

Левая часть уравнения (3) представляет собой скалярное произведение $(u, v)_1$ в $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{grad}}_G)$, и соответствующая норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме графика. При этом существует такое число $C > 0$, что при всех $v \in \operatorname{Ker} \gamma$ выполняются неравенства

$$\left| \int_G v f d\sigma \right| \leq \|f\|_{L^2(G)} \|v\|_{L^2(G)} \leq \|f\|_{L^2(G)} \cdot C \|v\|_1.$$

В гильбертовом пространстве $(\operatorname{Ker} \gamma, (\cdot, \cdot)_1)$ применяем теорему Рисса, в силу которой существует, и притом единственная, функция $u \in \operatorname{Ker} \gamma$, при всех $v \in \operatorname{Ker} \gamma$ удовлетворяющая уравнению (3).

Если теперь $u \in \operatorname{Ker} \gamma$ удовлетворяет уравнению (3) при всех $v \in \operatorname{Ker} \gamma$, то, записывая уравнение (3) в виде

$$\int_G ((\overline{\mathbf{grad}}_G u, \overline{\mathbf{grad}}_G v)) d\sigma = - \int_G v(f + a \cdot u) d\sigma,$$

приходим к выводу, что $\overline{\mathbf{grad}}_G u \in \mathcal{D}(\text{div}_G)$, и при этом $\Delta_G u = \text{div}_G (\overline{\mathbf{grad}}_G u) = f + au$.

Тем самым для граничного условия $\gamma(u) = 0$ доказано существование и единственность решения краевой задачи (1), (2).

Если $\varphi \in \gamma(\mathcal{D}(\Delta_G))$, то существует функция $w \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, для которой $\varphi = \gamma(w)$. В этом случае функция $u_1 = u - w$ должна удовлетворять задаче

$$\Delta_G u_1 - a \cdot u_1 = f - \Delta_G w + a \cdot w \in L^2(G),$$

$$\gamma(u_1) = 0,$$

существование и единственность решения которой обоснованы выше.

Тем самым доказано следующее предложение.

Теорема 2. При выполнении технических условий а)–в) задача (1), (2) в области риманова многообразия имеет, и притом единственное, решение.

4. Выполнение технических условий п. 3. В работе [1] в качестве нетривиального модельного примера риманова многообразия \mathcal{M} была рассмотрена граница области D гильбертова пространства H . Соответствующая борелевская мера σ на \mathcal{M} имела полный носитель, при этом \mathcal{M} является полным метрическим пространством относительно внутренней метрики. Поэтому любое векторное поле на \mathcal{M} класса $C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ является полным. Кроме того, оператор $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \rightarrow L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$ замыкаем.

С другой стороны, если G – ограниченная область в \mathcal{M} и соответствующее векторное поле \mathbf{n} не согласовано с $S = \partial G$, то к мере σ применима процедура сглаживания меры вдоль поля \mathbf{n} (см. [6]). При этом строится мера σ_φ на $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}(\mathcal{M}))$ по правилу

$$\sigma_\varphi(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sigma(\Phi_t^{\mathbf{n}} A) dt,$$

где $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{M})$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt < \infty$.

Полученная мера σ_φ согласована с S . Если при этом существует константа $C > 0$, для которой при всех s имеет место неравенство $|\varphi'(s)| \leq C\varphi(s)$ (например, $\varphi(s) = \frac{1}{1+s^2}$), то $\text{div}_{\sigma_\varphi} \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$.

Переход к мере σ_φ сохраняет также свойства полноты носителя меры и замыкаемость оператора $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma_\varphi) \rightarrow L^2_v(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$ (эти факты в [6] доказаны для случая $\mathcal{M} = H$, но в случае риманова многообразия полностью аналогичны). Поэтому для меры σ_φ выполняются свойства а), б) и остается лишь доказать свойство в) – замыкаемость оператора \mathbf{grad}_G , что и реализуется в приведенной ниже теореме 3.

Теорема 3. Пусть \mathcal{M} – риманово многообразие класса C^2 , σ – конечная борелевская мера на \mathcal{M} с полным носителем, оператор $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} : L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset C^1_b(\mathcal{M}) \ni u \mapsto \mathbf{grad} u \in L^2_v(\mathcal{M}, \sigma)$ замыкаем. G – ограниченная область в \mathcal{M} , граница которой согласована с мерой σ , и для соответствующего векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_b(\mathcal{M})$ (продолжение поля единичной внешней нормали к $S = \partial G$) $\text{div}_G \mathbf{n} \in L^\infty(\sigma)$. Для $u \in C^1(G)$ положим $\mathbf{grad}_G u = (\mathbf{grad} \tilde{u})|_G$ ($\tilde{u} \in C^1_b(\mathcal{M})$ – продолжение u на \mathcal{M}). Тогда оператор $\mathbf{grad}_G : L^2(G; \sigma) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}_G u \in L^2_v(G; \sigma)$ замыкаем.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $u_m \in C^1(G)$, $u_m \rightarrow 0$ в $L^2(G)$, $\mathbf{grad}_G u_m \rightarrow \mathbf{Z}$ в $L^2_v(G; \sigma)$. Построим функции $\tilde{u}_m \in C^1_b(\mathcal{M})$ по следующей схеме. Пусть $\varphi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\delta_m > 0$, $\varphi_m(t) = 0$ при $t \geq \delta_m$, $\varphi_m(t) = 1$ при $t \leq 0$, $\varphi'_m(0) = 0$. Если $x = \Phi_t y$ (здесь и в дальнейшем Φ_t – поток векторного поля \mathbf{n}), $y \in S = \partial G$, $0 \leq t \leq \delta_m$, то полагаем $\tilde{u}_m(x) = \varphi_m(t)u_m(\Phi_{-2t}x)$ ($= \varphi_m(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x))$); для остальных значений x полагаем $\tilde{u}_m(x) = 0$, если $x \notin G$, $\tilde{u}_m(x) = u(x)$, если $x \in G$. Тогда $\tilde{u}_m|_G = u_m$, $\tilde{u}_m \in C^1_b(\mathcal{M})$.

Докажем, что при подходящем выборе последовательности δ_m достигаются сходимости $\int_{\mathcal{M} \setminus G} \tilde{u}_m^2 d\sigma \rightarrow 0$, $\int_{\mathcal{M} \setminus G} \|\mathbf{grad} \tilde{u}_m\|^2 d\sigma \rightarrow 0$.

Шаг 2. По аналогии с доказательством теоремы 1 (см. формулы (10), (11) в [1]) получим

$$\int_{\mathcal{M} \setminus G} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int_{\Phi_{\delta_m} G \setminus G} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int_0^{\delta_m} dt \left(\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2 d\sigma \right), \tag{4}$$

$$\int_{\Phi_{2t} G_1} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 d\sigma_{2t} = \int_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma} d\sigma. \tag{5}$$

Применяя равенство (5) к области $G_1 = \Phi_{-t+s}G$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2 d\sigma &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{2t}(\Phi_{-t+s}G)} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma} d\sigma \leq \\ &\leq e^{2C|t|} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $C = \|\mathbf{div}_G \mathbf{n}\|_{L^\infty(\mathcal{M}, \sigma)}$.

Пусть $S_{-t} = \partial(\Phi_{-t}G)$. Поле \mathbf{n} , вообще говоря, не является нормальным к поверхности S_{-t} . Однако (при достаточно малых t) \mathbf{n} трансверсально к S_{-t} , что, в силу результатов работы [4], доказывает существование на S_{-t} поверхностной меры τ_{-t} , ассоциированной с мерой σ . В этом случае для функций $v_1, v_2 \in C_b(\mathcal{M})$, совпадающих на S_{-t} , следует существование производных и равенство

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} v_1 d\sigma = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} v_2 d\sigma$$

(проверка этого факта аналогична доказательству леммы 4 из работы [3]).

Поскольку функции $v_1 = (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \in C_b(\mathcal{M})$ и $v_2 = \varphi_m^2(t)u_m^2 \in C_b(\mathcal{M})$ совпадают на S_{-t} , то

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 d\sigma = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} \varphi_m^2(t)u_m^2 d\sigma. \tag{7}$$

Теперь из (4), (6), (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M} \setminus G} \tilde{u}_m^2 d\sigma &\leq \int_0^{\delta_m} \left(e^{2C|t|} \varphi_m^2(t) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s}G} u_m^2 d\sigma \right) dt \leq \\ &\leq e^{2C\delta_m} \int_0^{\delta_m} dt \frac{d}{dt} \int_{\Phi_{-t}G} u_m^2 d\sigma = e^{2C\delta_m} \int_{-\delta_m}^0 \left(\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} u_m^2 d\sigma \right) dt = \\ &= e^{2C\delta_m} \int_{G \setminus \Phi_{-\delta_m}} u_m^2 d\mu \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(здесь достаточно лишь ограниченности последовательности δ_m).

Шаг 3. По аналогии с шагом 3 доказательства теоремы 1 имеем (далее $x \in \mathcal{M} \setminus G$)

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \tilde{u}_m(x) &= (\tilde{u}'_m(x))^* = \left[(\varphi_m(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x)))' \right]^* = \\ &= \left[\varphi'_m(t(x))t'(x)u_m(\Phi(-2t(x), x)) + \varphi_m(t(x))\frac{d}{dx}u_m(\Phi(-2t(x), x)) \right]^* = \\ &= \varphi'_m(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x)) \mathbf{grad} t(x) + \\ &+ \varphi_m(t(x)) \left[u'_m(\Phi(-2t(x), x)) \left(-2\frac{\partial\Phi}{\partial t}(-2t(x), x)t'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right) \right]^* = \\ &= \varphi'_m(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x)) \mathbf{grad} t(x) + \\ &+ \varphi_m(t(x)) \left(-2 \mathbf{grad} t(x) \mathbf{n}^*(-2t(x), x) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right)^* \right) \times \\ &\quad \times \mathbf{grad} u_m(\Phi(-2t(x), x)). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 1, используется интерпретация вектора v из касательного пространства $T_p(\mathcal{M})$ как линейного оператора $v: \mathbb{R} \mapsto T_p(\mathcal{M})$ и, соответственно, $v^*: T_p(\mathcal{M}) \mapsto \mathbb{R}$. Если $v_1 \in T_q(\mathcal{M})$, $v_2 \in T_p(\mathcal{M})$, то $v_1 \cdot v_2^*$ — линейный оператор из $T_p(\mathcal{M})$ в $T_q(\mathcal{M})$, действующий по правилу $v_1 v_2^*: h \mapsto (h, v_2)v_1$. Напомним также, что $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, x)$ — линейный оператор из $T_x(\mathcal{M})$ в $T_{\Phi_t x}(\mathcal{M})$.

Поскольку формула (17) из [1] сохраняется и в случае риманова многообразия, из этой формулы и (8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \tilde{u}_m(x) &= \varphi'_m(t(x))u_m(\Phi(-2t(x), x)) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x), x) \right)^* \times \\ &\quad \times \mathbf{n}(\Phi(-t(x), x)) + \varphi_m(t(x)) \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right)^* - \right. \\ &\quad \left. -2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x), x) \right)^* \mathbf{n}(\Phi(-t(x), x)) \mathbf{n}^*(\Phi(-2t(x), x)) \mathbf{grad} u_m(\Phi(-2t(x), x)) \right). \end{aligned} \tag{9}$$

При достаточно малых δ_m при всех $x \in \mathcal{M}$ и $t(x) \in (0, \delta_m)$ выполняются неравенства $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(-t(x), x) \right\| \leq 2$, $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(-2t(x), x) \right\| \leq 2$ (соответствующий вывод полностью повторяет шаг 5 доказательства теоремы 1 из [1]), а также $\| \mathbf{n}(\Phi(-t(x), x)) \mathbf{n}^*(\Phi(-2t(x), x)) \| \leq 2$ (следует из условия $\sup_{\mathcal{M}} \| \mathbf{n}'(\cdot) \| < \infty$). Функции φ_m подбираем таким образом, чтобы для всех $t \in \mathbb{R}$ было выполнено неравенство $|\varphi'_m(t)| \leq \frac{2}{\delta_m}$.

Тогда из (9) получаем (для всех $s \in \mathcal{M} \setminus G$)

$$\| \mathbf{grad} \tilde{u}_m(x) \| \leq \frac{4}{\delta_m} \| u_m(\Phi(-2t(x), x)) \| + 10 \| \mathbf{grad} u_m(\Phi(-2t(x), x)) \|,$$

откуда следует

$$\| \mathbf{grad} \tilde{u}_m(x) \|^2 \leq \frac{32}{\delta_m^2} u_m^2(\Phi(-2t(x), x)) + 200 \| \mathbf{grad} u_m(\Phi(-2t(x), x)) \|^2.$$

Далее, по аналогии с шагом 2 имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M} \setminus G} \| \mathbf{grad} \tilde{u}_m \|^2 d\sigma &= \int_0^{\delta_m} dt \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} \| \mathbf{grad} \tilde{u}_m \|^2 d\sigma \leq \\ &\leq \int_0^{\delta_m} e^{2C|t|} dt \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\Phi_{-t+s} G} \| \mathbf{grad} \tilde{u}_m \|^2 \circ \Phi_{2t} d\sigma \leq \\ &\leq e^{2C\delta_m} \int_{-\delta_m}^0 dt \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} \frac{32}{\delta_m^2} u_m^2 + 200 \| \mathbf{grad} u_m \|^2 d\sigma \leq \\ &\leq \frac{32}{\delta_m^2} e^{2C\delta_m} \| u_m \|_{L^2(G)}^2 + 200 e^{2C\delta_m} \int_{G \setminus \Phi_{-\delta_m} G} \| \mathbf{grad} u_m \|^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{10}$$

Возьмем $\delta_m = \| u_m \|_{L^2(G)}^{1/2}$. Тогда первое слагаемое в правой части неравенства (10) стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. А из сходимости $\| \mathbf{grad}_G u_m \|^2 \rightarrow \| \mathbf{Z} \|^2$ в $L^1(G; \sigma)$ следует равномерная абсолютная непрерывность интегралов от функций $\| \mathbf{grad}_G u_m \|^2$. Потому и второе слагаемое в правой части неравенства (10) также стремится к нулю.

Пусть теперь векторное поле $\mathbf{W} \in L^2_v(\mathcal{M}; \sigma)$ определено условием $\mathbf{W}(x) = \mathbf{Z}(x)$, $x \in G$, $\mathbf{W}(x) = 0$, $x \notin G$. В силу доказанного выше $\tilde{u}_m \rightarrow 0$ в $L^2(\mathcal{M})$, $\mathbf{grad} \tilde{u}_m \rightarrow \mathbf{W}$ в $L^2_v(\mathcal{M})$. Но поскольку оператор \mathbf{grad} замыкаем, то $\mathbf{W} = 0 \pmod{\sigma}$. Отсюда следует равенство $\mathbf{Z} = 0 \pmod{\sigma|_G}$, что и доказывает замыкаемость оператора \mathbf{grad}_G .

Теорема доказана.

Литература

1. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 7. – С. 897–907.
2. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2 -версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169–1178.
3. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450–1460.
4. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299–1313.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
6. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733–739.

Получено 16.12.15