УДК 512.715, 512.554.31

А. П. Петравчук, К. Я. Сисак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АЛГЕБРИ ЛІ, АСОЦІЙОВАНІ З МОДУЛЯМИ НАД КІЛЬЦЯМИ МНОГОЧЛЕНІВ

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic zero. Let V be a module over the polynomial ring $\mathbb{K}[x, y]$. The actions of x and y determine linear operators P and Q on V as a vector space over $\mathbb{K}$. Define the Lie algebra $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ as the semidirect product of two abelian Lie algebras with the natural action of $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle$ on V. We show that if $\mathbb{K}[x, y]$-modules V and W are isomorphic or weakly isomorphic, then the corresponding associated Lie algebras L_V and L_W are isomorphic. The converse is not true: we construct two $\mathbb{K}[x, y]$-modules V and W of dimension 4 that are not weakly isomorphic but their associated Lie algebras are isomorphic. We characterize such pairs of $\mathbb{K}[x, y]$-modules of arbitrary dimension over $\mathbb{K}$. We prove that indecomposable modules V and W with $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W \geq 7$ are weakly isomorphic if and only if their associated Lie algebras L_V and L_W are isomorphic.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и V — модуль над кольцом многочленов $\mathbb{K}[x, y]$. Действие x и y определяет линейные операторы P и Q на V, как на векторном пространстве над $\mathbb{K}$. Определим алгебру Ли $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ как полупрямое произведение двух абелевых алгебр Ли с естественным действием $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle$ на V. Доказано, что если $\mathbb{K}[x, y]$-модули V и W изоморфны либо слабо изоморфны, то соответствующие ассоциированные алгебры Ли L_V и L_W изоморфны. Обратное утверждение в общем случае неверно: построены два $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V и W размерности 4, которые не являются слабо изоморфными, но их ассоциированные алгебры Ли изоморфны. Приведена характеристика таких пар $\mathbb{K}[x, y]$-модулей произвольной размерности над полем $\mathbb{K}$. Доказано, что неразложимые модули V и W такие, что $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W \geq 7$, слабо изоморфны тогда и только тогда, когда их ассоциированные алгебры Ли L_V и L_W изоморфны.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики 0 і V — модуль над кільцем многочленів $\mathbb{K}[x, y]$. Визначимо комутуючі лінійні оператори P і Q на V, поклавши $P(v) = x\cdot v$ та $Q(v) = y \cdot v$ для всіх $v \in V$. Навпаки, якщо P і Q — комутуючі лінійні оператори на V, то векторний простір V може бути розглянутий як $\mathbb{K}[x, y]$-модуль з операцією множення $f(x, y) \cdot v = f(P, Q)(v)$ для всіх $v \in V$ та $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$.

Для кожного $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V побудуємо метабелеву алгебру Лі $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$, яка є зовнішнім напівпрямим добутком абелевої алгебри Лі $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle$ розмірності 2 та абелевої алгебри Лі V з природною дією $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle$ на V. Будемо говорити, що алгебра Лі L_V *асоційована з* $\mathbb{K}[x, y]$-модулем V.

Модулі над кільцями многочленів вивчалися багатьма авторами: І. Гельфанд і В. Пономарьов [3] довели, що задача класифікації скінченновимірних модулів над $\mathbb{K}[x, y]$ містить задачу класифікації пар матриць з точністю до подібності.

Д. Квіллен [4] та А. Суслін [5] вивчали проективні модулі над поліноміальними кільцями у зв'язку з проблемою Серра.

Наша мета — вивчити співвідношення між скінченновимірними $\mathbb{K}[x, y]$-модулями V та відповідними асоційованими алгебрами Лі L_V.

Для кожного автоморфізму θ абелевої алгебри Лі $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle$ такого, що

$$\theta(P) = \alpha_{11}P + \alpha_{12}Q, \qquad \theta(Q) = \alpha_{21}P + \alpha_{22}Q, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{K},$$

напівпрямий добуток $\mathbb{K}\langle\theta(P), \theta(Q)\rangle \leftthreetimes V$ ізоморфний L_V. Відповідне перетворення кільця $\mathbb{K}[x, y]$ є автоморфізмом $\mathbb{K}[x, y]$, визначеним за правилом $\theta(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y$ та $\theta(y) = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y$. Цей автоморфізм визначає „підкручений" модуль V_θ з операцією множення на

© А. П. ПЕТРАВЧУК, К. Я. СИСАК, 2017

векторному просторі V :

$$x \circ v = \theta(x) \cdot v \qquad \text{та} \qquad y \circ v = \theta(y) \cdot v \qquad \text{для всіх} \quad v \in V.$$

Модулі V та V_θ називаються *слабко ізоморфними*; це поняття в матричній формі вивчалося Г. Беліцьким, Р. Ліпянським та В. Сергейчуком [2]. У твердженні 1 стверджується, що якщо $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V та W ізоморфні (або навіть слабко ізоморфні), то асоційовані алгебри Лі L_V та L_W ізоморфні. Обернене твердження в загальному випадку не виконується: в лемі 3 наведено приклад не слабко ізоморфних $\mathbb{K}[x, y]$-модулів V, W з ізоморфними асоційованими алгебрами Лі L_V та L_W. Однак якщо V і W нерозкладні та $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W \geq 7$, то за теоремою 2 модулі V і W слабко ізоморфні тоді і лише тоді, коли асоційовані алгебри Лі L_V і L_W ізоморфні.

Теорема 1 містить характеризацію таких пар $\mathbb{K}[x, y]$-модулів (V, W), які не є слабко ізоморфними, але їхні асоційовані алгебри Лі ізоморфні. Це показує, що задача класифікації скінченновимірних алгебр Лі вигляду $L = B \leftthreetimes A$ з абелевим ідеалом A та двовимірною абелевою підалгеброю B еквівалентна до задачі класифікації скінченновимірних $\mathbb{K}[x, y]$-модулів з точністю до слабкого ізоморфізму. На думку авторів, остання задача є дикою. Дикість задачі класифікації деяких класів метабелевих алгебр Лі була встановлена Г. Беліцьким, В. Бондаренком, Р. Ліпянським, В. Плахотніком та В. Сергейчуком [1, 2].

Далі основне поле $\mathbb{K}$ алгебраїчно замкнене характеристики нуль. Всі алгебри Лі та модулі над $\mathbb{K}[x, y]$, які ми розглядаємо, скінченновимірні над $\mathbb{K}$.

Нехай L_1, L_2 — алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$. Нехай $\varphi\colon L_1 \to \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} L_2$ — гомоморфізм алгебр Лі, де $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} L_2$ — алгебра Лі усіх $\mathbb{K}$-диференціювань L_2. *Зовнішній напівпрямий добуток* L_1 та L_2 $\big($позначається $L_1 \leftthreetimes_\varphi L_2$ або $L_1 \leftthreetimes L_2\big)$ — це векторний простір $L_1 \oplus L_2$ з операцією

$$\big[(a_1, b_1), (a_2, b_2)\big] = \big([a_1, a_2], D_1(b_2) - D_2(b_1)\big),$$

де $D_1 := \varphi(a_1), D_2 := \varphi(a_2)$.

Якщо алгебра Лі L містить ідеал N і підалгебру B таку, що $L = N + B$ та $N \cap B = 0$, то L — *внутрішній напівпрямий добуток* алгебр Лі B та N (пишемо $L = B \leftthreetimes N$) з природним гомоморфізмом алгебри Лі B в алгебру Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} N$.

Нехай W — підпростір векторного простору V над полем $\mathbb{K}$. Елементи $v_1, \ldots, v_n \in V$ називаються *лінійно незалежними над* W, якщо $v_1 + W, \ldots, v_n + W$ лінійно незалежні в фактор-просторі V/W. Якщо V та W — ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі, то пишемо $V \simeq W$.

2. $\mathbb{K}[x, y]$-модулі з ізоморфними асоційованими алгебрами Лі. Г. Беліцький, Р. Ліпянський та В. Сергейчук [2] розглядали поняття слабкіше, ніж подібність матричних пар. Їхнє поняття у випадку комутуючих матриць можна сформулювати на мові $\mathbb{K}[x, y]$-модулів таким чином. Нехай θ — лінійний автоморфізм кільця многочленів $\mathbb{K}[x, y]$, визначений лінійними однорідними многочленами, і V_θ — $\mathbb{K}[x, y]$-модуль, визначений вище.

Означення 1. *$\mathbb{K}[x, y]$-модулі V та W називаються слабко ізоморфними, якщо існує послідовність $\mathbb{K}[x, y]$-модулів $V := V_1, V_2, \ldots, V_k := W$ така, що або $V_i \simeq V_{i+1}$, або $V_{i+1} = (V_i)_{\theta_i}$ для деякого лінійного автоморфізму $\theta_i \in \operatorname{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Кожний слабкий ізоморфізм є відношенням еквівалентності на класі всіх $\mathbb{K}[x, y]$-модулів. Зрозуміло, що ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі є слабко ізоморфними. Обернене твердження, як показує наступний приклад, є хибним.

***Приклад* 1.** Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Виберемо базис у V над $\mathbb{K}$ і візьмемо довільну ненульову $(n \times n)$-матрицю A з коефіцієнтами в $\mathbb{K}$. Позначимо через V $\mathbb{K}[x, y]$-модуль над векторним простором V з дією x і y на V, визначеною матричною парою $(A, 0_n)$, де 0_n — нульова $(n \times n)$-матриця. Нехай $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$ — такий автоморфізм, що $\theta(x) = y$, $\theta(y) = x$. Визначимо дію $\mathbb{K}[x, y]$ на V_θ матричною парою $(0_n, A)$. Тоді модулі V та V_θ не ізоморфні, оскільки пари $(A, 0_n)$ та $(0_n, A)$ не є подібними.

***Зауваження* 1.** $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V та W слабко ізоморфні тоді і лише тоді, коли існує $\mathbb{K}[x, y]$-модуль U такий, що $U \simeq V$ та $W = U_\theta$ для деякого лінійного автоморфізму θ кільця $\mathbb{K}[x, y]$.

Твердження 1. *Якщо V та W — слабко ізоморфні модулі над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$, то відповідні асоційовані алгебри Лі L_V та L_W ізоморфні.*

Доведення. Ізоморфізм φ $\mathbb{K}[x, y]$-модулів V та W можна продовжити до ізоморфізму $\overline{\varphi}$ алгебр Лі $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ та $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ за правилом $\overline{\varphi}(P) = S$, $\overline{\varphi}(Q) = T$ і далі за лінійністю. Припустимо, що модулі V та W слабко ізоморфні, але не ізоморфні. Тоді існує $\mathbb{K}[x, y]$-модуль U такий, що $U \simeq V$ та $U_\theta = W$ для деякого лінійного автоморфізму $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$, заданого невиродженою (2×2)-матрицею $[a_{ij}]$ над $\mathbb{K}$:

$$\theta(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \qquad \theta(y) = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y.$$

Достатньо показати, що алгебри Лі L_U та L_{U_θ} ізоморфні. Запишемо $L_U = \mathbb{K}\langle T_1, T_2\rangle \leftthreetimes U$, де $T_1, T_2 \colon U \to U$ — комутуючі лінійні оператори, які визначають дію x та y відповідно на U. Тоді $L_{U_\theta} = \mathbb{K}\langle \theta(T_1), \theta(T_2)\rangle \leftthreetimes U$, де $\theta(T_1) = \alpha_{11}T_1 + \alpha_{12}T_2$ і $\theta(T_2) = \alpha_{21}T_1 + \alpha_{22}T_2$. Легко бачити, що $\mathbb{K}\langle \theta(T_1), \theta(T_2)\rangle = \mathbb{K}\langle T_1, T_2\rangle$. Тому L_U та L_{U_θ} — це одна і та ж алгебра Лі.

Твердження 1 доведено.

Твердження 2. *Нехай $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ та $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ — алгебри Лі, асоційовані з $\mathbb{K}[x, y]$-модулями V та W відповідно. Якщо φ — ізоморфізм алгебр Лі L_V і L_W такий, що $\varphi(V) = W$, то звуження φ на V є слабким ізоморфізмом модулів V та W.*

Доведення. Нехай $\varphi(P) = \alpha_1 S + \alpha_2 T + w_1$ і $\varphi(Q) = \beta_1 S + \beta_2 T + w_2$, де $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $w_1, w_2 \in W$. Розглянемо слабко ізоморфний модуль W_θ з автоморфізмом θ, визначеним за правилом $\theta(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ та $\theta(y) = \beta_1 x + \beta_2 y$. Ми можемо вважати, що $\varphi(P) = S + w_1$ та $\varphi(Q) = T + w_2$. Тоді звуження φ на V є ізоморфізмом $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V на $\mathbb{K}[x, y]$-модуль W_θ.

Твердження 2 доведено.

Лема 1. *Нехай V та W — $\mathbb{K}[x, y]$-модулі, які мають скінченну розмірність над $\mathbb{K}$. Нехай асоційовані алгебри Лі $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ і $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ ізоморфні і $\varphi \colon L_V \to L_W$ — який-небудь ізоморфізм цих алгебр Лі. Позначимо $W_1 := \varphi(V) \cap W$, $V_1 := \varphi^{-1}(W_1)$. Тоді V_1 — підмодуль в V і W_1 — підмодуль в W. Більш того*:

(i) *якщо $\varphi(V) + W = L_W$, то $\dim_{\mathbb{K}} V/V_1 = \dim_{\mathbb{K}} W/W_1 = 2$;*

(ii) *якщо $\dim_{\mathbb{K}}(\varphi(V) + W)/W = 1$, то $\dim_{\mathbb{K}} V/V_1 = \dim_{\mathbb{K}} W/W_1 = 1$.*

Доведення. Маємо канонічний ізоморфізм $\mathbb{K}[x, y]$-модулів

$$\varphi(V) + W/W \simeq \varphi(V)/(\varphi(V) \cap W) = \varphi(V)/W_1. \tag{1}$$

Нехай $\varphi(V) + W = L_W$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} L_W/W = 2$, то з (1) випливає, що $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(V)/W_1 = 2$. Використовуючи ізоморфізм φ^{-1}, отримуємо рівність $\dim_{\mathbb{K}} V/V_1 = 2$. З $\dim_{\mathbb{K}} L_V/V_1 = 4$ випливає, що $\dim_{\mathbb{K}} L_W/W_1 = 4$. Але тоді $\dim_{\mathbb{K}} W/W_1 = 2$. Твердження (ii) доводиться аналогічно.

Лема 2. *Нехай V та W — модулі над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$, які мають скінченну розмірність над $\mathbb{K}$. Нехай $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ і $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ — відповідні асоційовані алгебри Лі. Якщо існує ізоморфізм алгебр Лі $\varphi\colon L_V \to L_W$ такий, що $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) + W = L_W$, то $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V і W слабко ізоморфні.*

Доведення. Оскільки φ ін'єктивне і $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W < \infty$, то легко бачити, що з $\varphi(V) \subseteq W$ випливає $\varphi(V) = W$. З урахуванням твердження 2 можемо вважати, що $\varphi(V) \nsubseteq W$. Оскільки $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) + W = L_W$, то ми можемо також вважати, що

$$\varphi(P) = S + w_1, \qquad \varphi(Q) = T + w_2$$

для деяких $w_1, w_2 \in W$ (якщо необхідно, то перейти до деякого слабко ізоморфного модуля W_θ).

Розглянемо два випадки:

Випадок 1: $\varphi(V) + W = L_W$. Запишемо $W_1 := \varphi(V) \cap W$ і $V_1 := \varphi^{-1}(W_1)$. За лемою 1 V_1 – підмодуль $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V з $\dim_{\mathbb{K}} V/V_1 = 2$ і W_1 — підмодуль у W з $\dim_{\mathbb{K}} W/W_1 = 2$. Тому $V = \mathbb{K}\langle v_1, v_2\rangle + V_1$ для деяких $v_1, v_2 \in V \setminus V_1$. Нехай $\varphi(v_1) = \alpha_{11}S + \alpha_{12}T + u_1$, $\varphi(v_2) = \alpha_{21}S + \alpha_{22}T + u_2$ для деяких $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j = 1, 2$, і $u_1, u_2 \in W$. Оскільки $\varphi(V) + W = L_W$, то матриця $[\alpha_{ij}]$ невироджена. Тому ми можемо вибрати елементи v_1 та v_2 таким чином, щоб виконувались умови

$$\varphi(v_1) = S + u_1, \qquad \varphi(v_2) = T + u_2.$$

Оскільки $[P, Q] = 0$ в алгебрі Лі L_V і φ — ізоморфізм алгебр Лі, то

$$0 = \varphi\big([P, Q]\big) = \big[\varphi(P), \varphi(Q)\big] = [S + w_1, T + w_2] = S(w_2) - T(w_1),$$

і тому

$$T(w_1) = S(w_2). \tag{2}$$

Аналогічно з рівності $[v_1, v_2] = 0$ в L_V випливає, що

$$S(u_2) = T(u_1). \tag{3}$$

Знайдемо образи добутків елементів з L_V в алгебрі Лі L_W:

$$\varphi\big([P, v_1]\big) = [S + w_1, S + u_1] = S(u_1) - S(w_1) = S(u_1 - w_1), \tag{4}$$

$$\varphi\big([Q, v_2]\big) = [T + w_2, T + u_2] = T(u_2) - T(w_2) = T(u_2 - w_2). \tag{5}$$

Використовуючи співвідношення (2) та (3), отримуємо також

$$\varphi\big([P, v_2]\big) = [S + w_1, T + u_2] = S(u_2) - T(w_1) = S(u_2 - w_2), \tag{6}$$

$$\varphi\big([Q, v_1]\big) = [T + w_2, S + u_1] = T(u_1) - S(w_2) = T(u_1 - w_1). \tag{7}$$

З рівності $[V, V_1] = 0$ в алгебрі Лі L_V випливає, що

$$\varphi\big([V, V_1]\big) = 0 = \big[\varphi(V), \varphi(V_1)\big] = [\varphi(V), W_1].$$

Оскільки $[W, W_1] = 0$ і $L_W = \varphi(V) + W$, то $[L_W, W_1] = 0$, звідки випливає рівність $[L_V, V_1] = 0$. Як наслідок з останніх двох рівностей отримаємо

$$[P, V_1] = [Q, V_1] = 0, \qquad [S, W_1] = [T, W_1] = 0.$$

Покажемо, що лінійні оператори P, Q діють тривіально на фактор-модулі V/V_1. Розглянемо, наприклад, елемент $P(v_1) = [P, v_1]$. Оскільки $P(v_1) \in V$ і $\varphi(P(v_1)) \in W$ (див. (4)), то $\varphi(P(v_1)) \in W_1$. Далі, з рівності $V_1 = \varphi^{-1}(W_1)$ отримаємо включення $P(v_1) \in V_1$. Використовуючи співвідношення (5)–(7), можна довести також, що $P(v_2), Q(v_1), Q(v_2) \in V_1$.

Визначимо лінійне відображення $\widehat{\varphi}\colon V \to W$ за правилом $\widehat{\varphi}(v) = \varphi(v)$ для $v \in V_1$ і $\widehat{\varphi}(v_1) = u_1 - w_1$, $\widehat{\varphi}(v_2) = u_2 - w_2$. Легко перевірити, що для всіх $v \in V_1$ виконується

$$\widehat{\varphi}(x \cdot v) = \widehat{\varphi}(P(v)) = 0 = S(\varphi(v)) = x \cdot \widehat{\varphi}(v),$$

$$\widehat{\varphi}(x \cdot v_1) = \widehat{\varphi}(P(v_1)) = \varphi(P(v_1)) = S(u_1 - w_1) = x \cdot (u_1 - w_1) = x \cdot \widehat{\varphi}(v_1).$$

Аналогічні співвідношення виконуються для $x \cdot v_2$, $y \cdot v_1$ та $y \cdot v_2$. Тому лінійне відображення $\widehat{\varphi}$ є гомоморфізмом $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V на $\mathbb{K}[x, y]$-модуль W.

Покажемо, що $\widehat{\varphi}$ — сюр'єктивний гомоморфізм. Достатньо перевірити, що $u_1 - w_1$ та $u_2 - w_2$ лінійно незалежні над W_1 у векторному просторі W. Припустимо протилежне, нехай $\alpha(u_1 - w_1) + \beta(u_2 - w_2) \in W_1$ для деяких коефіцієнтів $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, принаймні один з яких ненульовий. Тоді

$$\varphi(\alpha(v_1 - P) + \beta(v_2 - Q)) = \alpha(u_1 - w_1) + \beta(u_2 - w_2) \in W_1,$$

звідки $\alpha(v_1 - P) + \beta(v_2 - Q) \in V_1$, і тому $\alpha P + \beta Q \in V$, що неможливо, оскільки $\mathbb{K}\langle P, Q\rangle \cap V = 0$. Ми довели, що $\widehat{\varphi}$ є сюр'єктивним. Оскільки модулі V і W мають однакову розмірність над $\mathbb{K}$, то відображення $\widehat{\varphi}$ є ізоморфізмом $\mathbb{K}[x, y]$-модулів V та W.

Випадок 2: $\varphi(V) + W \neq L_W$. Тоді $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(V) + W/W = 1$, і за лемою 1 $W_1 = \varphi(V) \cap W$ є підмодулем в W з $\dim_{\mathbb{K}} W/W_1 = 1$. Аналогічно $V_1 = \varphi^{-1}(W_1)$ — підмодуль в V з $\dim_{\mathbb{K}} V/V_1 = 1$. Візьмемо довільний $v_0 \in V \setminus V_1$. Тоді $V = \mathbb{K}\langle v_0\rangle + V_1$ і $\varphi(v_0) = \alpha S + \beta T + w_0$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $w_0 \in W$. Як і раніше, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\varphi(P) = S + w_1$, $\varphi(Q) = T + w_2$. Тоді

$$\varphi\big([P, v_0]\big) = \big[\varphi(P), \varphi(v_0)\big] = [S + w_1, \alpha S + \beta T + w_0] = S(w_0) - \alpha S(w_1) - \beta T(w_1),$$

$$\varphi\big([Q, v_0]\big) = \big[\varphi(Q), \varphi(v_0)\big] = [T + w_2, \alpha S + \beta T + w_0] = T(w_0) - \alpha S(w_2) - \beta T(w_2).$$

Використовуючи (2), одержуємо

$$\varphi\big([P, v_0]\big) = S(w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2), \qquad \varphi\big([Q, v_0]\big) = S(w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2). \tag{8}$$

З цих рівностей випливає, що $\varphi(P(v_0))$, $\varphi(Q(v_0)) \in W$. Так само, як у випадку 1, можна показати, що $P(v_0), Q(v_0) \in V_1$. Визначимо лінійне відображення $\widetilde{\varphi}\colon V \to W$ за правилом $\widetilde{\varphi}(v) = \varphi(v)$ для $v \in V_1$ та $\widetilde{\varphi}(v_0) = w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2$. За співвідношенням (8) $\widetilde{\varphi}$ — гомоморфізм $\mathbb{K}[x, y]$-модулів (зазначимо, що $[P, v_1], [Q, v_1] \in V_1$ для всіх $v_1 \in V_1$).

Покажемо, що $w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2 \notin W_1$. Припустимо протилежне. Тоді існує $v \in V_1$ такий, що $w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2 = \varphi(v)$. Звідси отримуємо

$$\varphi(v_0 - v) = \alpha S + \beta T + w_0 - w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha(S + w_1) + \beta(T + w_2) = \varphi(\alpha P + \beta Q).$$

Оскільки φ — ізоморфізм алгебр Лі, то з останніх співвідношень випливає, що $v_0 - v = \alpha P + \beta Q$. Тоді $v_0 - v \in V \cap \mathbb{K}\langle P, Q\rangle = 0$. Звідси $v = v_0$ і $v_0 \in V_1$, що суперечить вибору v_0. Отже, $w_0 - \alpha w_1 - \beta w_2 \notin W_1$ і $\widetilde{\varphi}$ — сюр'єктивний гомоморфізм, а тому ізоморфізм $\mathbb{K}[x, y]$-модулів.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай $V = \mathbb{K}\langle v_1, v_2, a_1, a_2\rangle$ і $W = \mathbb{K}\langle w_1, w_2, b_1, b_2\rangle$ — модулі над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$ з такою дією x та y :*

1) $xv_1 = a_1$, $xv_2 = a_2$, інші добутки x, y з базисними елементами V дорівнюють 0;

2) $xw_1 = b_1$, $yw_1 = b_2$, інші добутки x, y з базисними елементами W дорівнюють 0.

Тоді $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V та W не є слабко ізоморфними, але відповідні асоційовані алгебри Лі L_V та L_W ізоморфні.

Доведення. Анулятор $\mathrm{Ann}_W(\mathbb{K}[x, y]) = \{w \in W \mid \mathbb{K}[x, y] \cdot w = 0\}$ кільця $\mathbb{K}[x, y]$ в W є підмодулем модуля W. Тоді $\mathrm{Ann}_W(\mathbb{K}[x, y]) = \mathbb{K}\langle w_2, b_1, b_2\rangle$ і

$$\mathrm{Ann}_{W_\theta}(\mathbb{K}[x, y]) = \mathrm{Ann}_W(\mathbb{K}[x, y]) = \mathbb{K}\langle w_2, b_1, b_2\rangle$$

для довільного лінійного автоморфізму $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x, y])$. Покажемо, що $\mathrm{Ann}_V(\mathbb{K}[x, y]) = \mathbb{K}\langle a_1, a_2\rangle$. Візьмемо довільний елемент $v \in V$ і запишемо $v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + z$, де $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$ і $z \in \mathbb{K}\langle a_1, a_2\rangle$. Якщо $v \in \mathrm{Ann}_V(\mathbb{K}[x, y])$, то $x \cdot v = 0$, звідки $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = 0$, оскільки $x \cdot z = 0$. Елементи a_1, a_2 лінійно незалежні над $\mathbb{K}$ і тому $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, тобто $v = z \in \mathbb{K}\langle a_1, a_2\rangle$. Зрозуміло, що $\mathbb{K}\langle a_1, a_2\rangle \subseteq \mathrm{Ann}_V(\mathbb{K}[x, y])$. Отже, $\mathbb{K}\langle a_1, a_2\rangle = \mathrm{Ann}_V(\mathbb{K}[x, y])$.

Тепер припустимо, що $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V і W слабко ізоморфні. Тоді існує $\mathbb{K}[x, y]$-модуль U такий, що $V \simeq U$ і $W = U_\theta$ для деякого лінійного автоморфізму θ кільця $\mathbb{K}[x, y]$. Оскільки $V \simeq U$, то $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ann}_U(\mathbb{K}[x, y]) = 2$. Легко бачити, що $\mathrm{Ann}_U(\mathbb{K}[x, y]) = \mathrm{Ann}_{U_\theta}(\mathbb{K}[x, y])$. Тоді $\mathrm{Ann}_W(\mathbb{K}[x, y])$ має розмірність два над $\mathbb{K}$, що неможливо. Отримана суперечність показує, що V та W не є слабко ізоморфними.

Нехай L_V та L_W — алгебри Лі, які асоційовані з $\mathbb{K}[x, y]$-модулями V і W відповідно. Визначимо лінійне відображення $\overline{\varphi}\colon L_V \to L_W$ за правилом

$$\overline{\varphi}(P) = -w_1, \qquad \overline{\varphi}(Q) = -w_2, \qquad \overline{\varphi}(v_1) = S, \qquad \overline{\varphi}(v_2) = T, \qquad \overline{\varphi}(a_1) = b_1, \qquad \overline{\varphi}(a_2) = b_2.$$

Тоді

$$\overline{\varphi}([P, v_1]) = \overline{\varphi}(P(v_1)) = \overline{\varphi}(a_1) = b_1 = S(w_1) =$$

$$= [S, w_1] = [-w_1, S] = [\overline{\varphi}(P), \overline{\varphi}(v_1)],$$

$$\overline{\varphi}([Q, v_1]) = \overline{\varphi}(Q(v_1)) = \overline{\varphi}(0) = 0 = S(w_2) = [-w_2, S] = [\overline{\varphi}(Q), \overline{\varphi}(v_1)].$$

Аналогічно перевіряється, що $\overline{\varphi}([P, v_2]) = \big[\overline{\varphi}(P), \overline{\varphi}(v_2)\big]$ та $\overline{\varphi}([Q, v_2]) = \big[\overline{\varphi}(Q), \overline{\varphi}(v_2)\big]$. Оскільки інші добутки x і y з базисними елементами із V дорівнюють нулю, то, очевидно, $\overline{\varphi}$ — ізоморфізм алгебр Лі L_V та L_W.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай V і W — модулі над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$, які скінченновимірні над $\mathbb{K}$ і не є слабко ізоморфними. Нехай $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$ і $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ — їхні асоційовані алгебри Лі. Якщо існує ізоморфізм $\varphi\colon L_V \to L_W$ алгебр Лі такий, що $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) \subseteq W$, то $V = V_0 \oplus V_2$ і $W = W_0 \oplus W_2$, де V_2 і W_2 — ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі з тривіальною дією кільця $\mathbb{K}[x, y]$ на них, V_0 і W_0 — не слабко ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі з $\dim_{\mathbb{K}} V_0 = \dim_{\mathbb{K}} W_0 \le 6$.*

Доведення. Виконується рівність $\varphi(V) + W = L_W$. Дійсно, якщо це не так, то

$$\varphi(L_V) \subseteq \varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) + \varphi(V) \subseteq \varphi(V) + W \subset L_W,$$

що неможливо, оскільки $\varphi(L_V) = L_W$. Запишемо $W_1 := \varphi(V) \cap W$ і $V_1 := \varphi^{-1}(W_1)$. За лемою 1 W_1 — підмодуль корозмірності 2 в W і V_1 — підмодуль корозмірності 2 в V. Візьмемо довільні $v_1, v_2 \in V \setminus V_1$ такі, що $V = \mathbb{K}\langle v_1, v_2\rangle + V_1$. За умовою леми $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) \subseteq W$, тому $\varphi(P) = w_1$ і $\varphi(Q) = w_2$ для деяких $w_1, w_2 \in W$. Оскільки $\varphi(V) + W = L_W$, то $v_1, v_2 \in V$ можна вибрати так, щоб виконувалися рівності $\varphi(v_1) = S + u_1$ і $\varphi(v_2) = T + u_2$, де $u_1, u_2 \in W$. Оскільки $[v_1, v_2] = 0$, то

$$\varphi\big([v_1, v_2]\big) = \big[\varphi(v_1), \varphi(v_2)\big] = [S + u_1, T + u_2] = S(u_2) - T(u_1) = 0,$$

звідки випливає, що $S(u_2) = T(u_1)$. Аналогічно отримуємо

$$\varphi\big([P, v_1]\big) = \big[\varphi(P), \varphi(v_1)\big] = [w_1, S + u_1] = -S(w_1),$$

$$\varphi([P, v_2]) = [\varphi(P), \varphi(v_2)] = [w_1, T + u_2] = -T(w_1),$$

$$\varphi\big([Q, v_1]\big) = \big[\varphi(Q), \varphi(v_1)\big] = [w_2, S + u_1] = -S(w_2),$$

$$\varphi\big([Q, v_2]\big) = \big[\varphi(Q), \varphi(v_2)\big] = [w_2, T + u_2] = -T(w_2).$$

З $[v_1, V_1] = [v_2, V_1] = 0$ випливає, що

$$\varphi\big([v_1, V_1]\big) = [S + u_1, W_1] = [S, W_1] = 0, \qquad \varphi\big([v_2, V_1]\big) = [T + u_2, W_1] = [T, W_1] = 0.$$

Звідси $W_1 \subseteq Z(L_W)$, і тому $V_1 = \varphi^{-1}(W_1) \subseteq Z(L_V)$, де $Z(L_V),\ Z(L_W)$ — центри алгебр Лі L_V та L_W відповідно.

Покажемо, що похідна підалгебра L'_V алгебри Лі L_V має розмірність ≤ 4 над $\mathbb{K}$. Всі $g_1, g_2 \in L_V$ зображуються у вигляді

$$g_1 = \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 v_1 + \delta_1 v_2 + u_3, \qquad g_2 = \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 v_1 + \delta_2 v_2 + u_4,$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2$, і $u_3, u_4 \in V_1$. Маємо

$$[g_1, g_2] = \alpha_{11}[P, v_1] + \alpha_{12}[P, v_2] + \alpha_{21}[Q, v_1] + \alpha_{22}[Q, v_2]$$

для деяких $\alpha_{ij} \in \mathbb{K},\ i, j = 1, 2$. Очевидно, L'_V — $\mathbb{K}$-лінійна оболонка елементів $[P, v_1],\ [P, v_2],\ [Q, v_1],\ [Q, v_2]$, і тому $\dim_{\mathbb{K}} L'_V \leq 4$.

Розглянемо підалгебру V_0 алгебри Лі L_V, породжену $v_1,\ v_2$ та їхніми образами під дією операторів P і Q. Легко показати, що V_0 є підмодулем $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V і V_0 — лінійна оболонка елементів $v_1,\ v_2,\ P(v_1),\ P(v_2),\ Q(v_1)$ і $Q(v_2)$, і тому $\dim_{\mathbb{K}} V_0 \leq 6$. Візьмемо довільний підпростір V_2 векторного простору V_1 такий, що $V_1 = (V_0 \cap V_1) \oplus V_2$. Легко бачити, що $V = V_0 \oplus V_2$ і $\mathbb{K}[x, y]$ діє тривіально на V_2, оскільки $V_2 \subset V_1$ і $[P, V_1] = [Q, V_1] = 0$. Отже, $V = V_0 \oplus V_2$ — пряма сума $\mathbb{K}[x, y]$-підмодулів.

Аналогічно розглянемо підалгебру W_0 алгебри Лі L_W, породжену елементами w_1, w_2 і їхніми образами під дією операторів S і T. Зрозуміло, що L'_W збігається з $\mathbb{K}$-лінійною оболонкою елементів $[S, w_1],\ [S, w_2],\ [T, w_1]$ та $[T, w_2]$. Оскільки L_V та L_W — ізоморфні алгебри Лі, то $\dim_{\mathbb{K}} L'_V = \dim_{\mathbb{K}} L'_W \leq 4$. Крім того, W_0 — підмодуль в W і $\dim_{\mathbb{K}} V_0 = \dim_{\mathbb{K}} W_0 \leq 6$. Візьмемо довільне пряме доповнення W_2 до $W_0 \cap W_1$ в $\mathbb{K}[x, y]$-модулі W_1. Тоді $W = W_0 \oplus W_2$ — пряма сума підмодулів і $\mathbb{K}[x, y]$ діє на W_2 тривіально, тому що $W_2 \subset W_1$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = \dim_{\mathbb{K}} W_2$, то V_2 і W_2 — ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі. За умовою леми $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V та W не є слабко ізоморфними, тому підмодулі V_0 та W_0 також не є слабко ізоморфними.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай V, W — $\mathbb{K}[x,y]$-модулі, які скінченновимірні над $\mathbb{K}$, і $L_V = \mathbb{K}\langle P,Q\rangle \leftthreetimes V$, $L_W = \mathbb{K}\langle S,T\rangle \leftthreetimes W$ — відповідні асоційовані алгебри Лі. Якщо існує ізоморфізм $\varphi\colon L_V \to L_W$ алгебр Лі такий, що $\dim_{\mathbb{K}}(\varphi(V)+W/W)=1$ і $\dim_{\mathbb{K}}(\varphi(\mathbb{K}\langle P,Q\rangle)+W/W)=1$, то $\mathbb{K}[x,y]$-модулі V і W слабко ізоморфні.*

Доведення. Запишемо $W_1 := \varphi(V)\cap W$ і $V_1 := \varphi^{-1}(W_1)$. За лемою 1 W_1 — підмодуль корозмірності 1 у W і V_1 — підмодуль корозмірності 1 у V. Візьмемо довільний $v_1 \in V\setminus V_1$. Тоді $\mathbb{K}\langle v_1\rangle + V_1 = V$. Переходячи до слабко ізоморфного модуля W_θ, якщо потрібно, можна відразу вважати, що $\varphi(v_1) = S + u_1$ для деякого $u_1\in W$. З умови $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\langle P,Q\rangle + W)/W = 1$ випливає, що $\varphi(\mathbb{K}\langle P,Q\rangle)\cap W \neq 0$, і тому $\varphi(\alpha P+\beta Q) = w_1\in W$ для деяких $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ і ненульового $w_1\in W$. Переходячи до слабко ізоморфного модуля V_σ, якщо потрібно, ми можемо вважати, що $\varphi(P) = w_1$, і тоді одержимо

$$\varphi(v_1) = S+u_1, \qquad \varphi(P) = w_1. \tag{9}$$

Оскільки V — абелева підалгебра алгебри Лі L_V, то $[v_1, V_1] = 0$. Використовуючи рівність $\varphi(V_1) = W_1$, отримуємо

$$\varphi\big([v_1,V_1]\big) = \big[\varphi(v_1),\varphi(V_1)\big] = [S+u_1, W_1] = [S,W_1] = 0.$$

Аналогічно, з $[w_1,W_1]=0$ випливає рівність $\varphi^{-1}([w_1,W_1]) = [P,V_1] = 0$. Оскільки $P\notin V_1$, то $\varphi(P) = w_1\notin W_1$. Тому $W = \mathbb{K}\langle w_1\rangle + W_1$.

Без обмеження загальності можемо вважати, що $u_1\in\mathbb{K}\langle w_1\rangle$, де u_1 визначено в (9). Дійсно, $u_1 = \alpha_1 w_1 + w_2$ для деяких $\alpha_1\in\mathbb{K}$ та $w_2\in W_1$. Якщо $w_2\neq 0$, то ми можемо взяти $v_1 - v_2$ замість v_1 для деякого $v_2\in V_1$ такого, що $\varphi(v_2) = w_2$ (це можливо, тому що $\varphi\colon V_1\to W_1$ — бієкція). Тому далі вважаємо, що $u_1 = \alpha_1 w_1$. Далі, $\varphi(Q) = \gamma S + \delta T + u_2$ для деяких $\gamma,\delta\in\mathbb{K}$, $u_2\in W$. Зазначимо, що $\delta\neq 0$, оскільки інакше $\varphi(\mathbb{K}\langle P,Q,v_1,V_1\rangle)\subseteq \mathbb{K}\langle S\rangle + W \neq L_W$, що неможливо. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\varphi(Q) = T+u_3$ для деякого $u_3\in W$ $\big($перейти до модуля W_π, якщо це необхідно, де $\pi(x) = x, \pi(y) = y/\delta - \gamma x/\delta\big)$. Більш того, замінюючи Q на $Q' = Q-\mu P$ для деякого $\mu\in\mathbb{K}$ та використовуючи $\varphi(P) = w_1$, можемо вважати, що $u_3\in W_1$. Це означає перехід до модуля V_ρ з автоморфізмом ρ, визначеним за правилом $\rho(x) = x$ та $\rho(y) = y-\mu x$. Останні два автоморфізми зберігають співвідношення (9), тому ми можемо послідовно їх використати.

Із співвідношень

$$0 = \varphi\big([P,Q]\big) = \big[\varphi(P),\varphi(Q)\big] = [w_1, T+u_3] = -T(w_1)$$

випливає, що

$$T(w_1) = 0. \tag{10}$$

Далі, виконуються рівності

$$\varphi\big([P,v_1]\big) = \big[\varphi(P),\varphi(v_1)\big] = [w_1, S+u_1] = -S(w_1), \tag{11}$$

$$\varphi\big([Q,v_1]\big) = \big[\varphi(Q),\varphi(v_1)\big] = [T+u_3, S+u_1] = T(u_1) - S(u_3) = 0. \tag{12}$$

Остання рівність у (12) виконується тому, що $T(u_1) = 0$ (з огляду на (10)) і $S(u_3) = 0$, тому що $u_3\in W_1$ та $[S,W_1] = 0$. Оскільки $\varphi\big([Q,v_1]\big) = 0$, то $[Q,v_1] = 0$. Покажемо, що $P(v_1)\in V_1$. Справді, із (11) випливає, що $\varphi(P(v_1)) = -S(w_1)\in W$. Більш того, $P(v_1)\in V$, і тому $\varphi\big(P(v_1)\big) \in \varphi(V)$. Тоді $\varphi\big(P(v_1)\big) \in W_1$ і $P(v_1) \in \varphi^{-1}(W_1) = V_1$. Визначимо лінійне відображення $\psi\colon V \to W$ за правилом $\psi(v) = \varphi(v)$ для $v \in V_1$ та $\psi(v_1) = -w_1$. Тоді звуження ψ на V_1 є ізоморфізмом $\mathbb{K}[x, y]$-модулів V_1 та W_1. Використовуючи (11) і (12), неважко переконатися, що ψ — ізоморфізм $\mathbb{K}[x, y]$-модулів V та W.

Лему 5 доведено.

3. Основні теореми.

Теорема 1. *Нехай V і W — $\mathbb{K}[x, y]$-модулі, які скінченновимірні над $\mathbb{K}$, і $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$, $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ — асоційовані з ними алгебри Лі. Нехай L_V і L_W ізоморфні. Тоді виконується одна з таких умов*:

(i) *V і W — слабко ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі*;

(ii) *$V = V_0 \oplus V_2$, $W = W_0 \oplus W_2$, де V_0, W_0 — не слабко ізоморфні підмодулі такі, що $\dim_{\mathbb{K}} V_0 = \dim_{\mathbb{K}} W_0 \le 6$, і V_2, W_2 — ізоморфні підмодулі однакової розмірності такі, що $\mathbb{K}[x, y]$ діє на них тривіально.*

Доведення. Нехай $\varphi\colon L_V \to L_W$ — ізоморфізм алгебр Лі. Якщо $\varphi(V) = W$ або $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) + W = L_W$, то V і W — слабко ізоморфні модулі за зауваженням 2 і лемою 2. Якщо $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(V) + W/W = 1$ і $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(\langle P, Q\rangle) + W/W = 1$, то модулі V і W слабко ізоморфні за лемою 5. Якщо $\varphi(\langle P, Q\rangle) \subseteq W$ і модулі V та W не слабко ізоморфні, то V і W є типу (ii) теореми за лемою 4.

Отже, ми можемо вважати, що $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(\langle P, Q\rangle) + W/W = 1$ і $\varphi(V) + W = L_W$. За лемою 1 $W_1 = \varphi(V) \cap W$ — підмодуль корозмірності 2 в W і $V_1 = \varphi^{-1}(W_1)$ — підмодуль корозмірності 2 в V. Виберемо $v_1, v_2 \in V \setminus V_1$ такі, що $V = \mathbb{K}\langle v_1, v_2\rangle + V_1$ і

$$\varphi(v_1) = S + u_1, \qquad \varphi(v_2) = T + u_2$$

для деяких $u_1, u_2 \in W$ (це можливо тому, що v_1, v_2 лінійно незалежні над V_1 і $\varphi(V) + W = L_W$). Так само, як і в доведенні леми 4, можна показати, що $[P, V_1] = [Q, V_1] = 0$ і $[S, W_1] = [T, W_1] = 0$.

Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} \varphi(\langle P, Q\rangle) + W/W = 1$, то $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) \cap W \ne 0$. Візьмемо ненульовий елемент $w_3 \in \varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) \cap W$ і запишемо $\varphi(\alpha P + \beta Q) = w_3$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ми можемо вважати, що $\varphi(Q) = w_3$ (перейшовши до слабко ізоморфного модуля V_θ, якщо необхідно). Більш того, $\varphi(\mathbb{K}\langle P, Q\rangle) \nsubseteq W$, тому ми вважаємо, що $\varphi(P) = S + u_3$ для деякого $u_3 \in W$ (перейшовши до слабко ізоморфного модуля W_σ, якщо потрібно).

Оскільки $[P, Q] = 0$ і $[v_1, v_2] = 0$, то одержуємо

$$[\varphi(P), \varphi(Q)] = [S + u_3, w_3] = S(w_3) = 0,$$

$$[\varphi(v_1), \varphi(v_2)] = [S + u_1, T + u_2] = S(u_2) - T(u_1) = 0.$$

Як наслідок,

$$S(w_3) = 0, \qquad S(u_2) = T(u_1). \tag{13}$$

Аналогічно отримуємо співвідношення

$$\varphi\big([P, v_1]\big) = \big[\varphi(P), \varphi(v_1)\big] = [S + u_3, S + u_1] = S(u_1 - u_3), \tag{14}$$

$$\varphi\big([P, v_2]\big) = [S + u_3, T + u_2] = S(u_2) - T(u_3) = -T(u_1 - u_3), \tag{15}$$

$$\varphi\big([Q, v_1]\big) = \big[\varphi(Q), \varphi(v_1)\big] = [w_3, S + u_1] = -S(w_3) = 0, \tag{16}$$

$$\varphi\big([Q, v_2]\big) = \big[\varphi(Q), \varphi(v_2)\big] = [w_3, T + u_2] = -T(w_3), \tag{17}$$

(ми використали (13) у (15) та (16)).

Оскільки φ — ізоморфізм алгебри Лі L_V на алгебру Лі L_W і $\varphi\big([Q, v_1]\big) = 0$ за (16), очевидно, $[Q, v_1] = 0$. Зауважимо, що $\mathbb{K}\langle u_1 - u_3, w_3\rangle + W_1 = W$. Дійсно, легко бачити, що $u_1 - u_3 = \varphi(v_1 - P)$. Оскільки $v_1 - P$ і Q лінійно незалежні в L_V над V_1, то їхні образи $u_1 - u_3$ та w_3 при ізоморфізмі φ лінійно незалежні над W_1 в W.

Запишемо $V_0 := \mathbb{K}\langle v_1, v_2, P(v_1), P(v_2), Q(v_2)\rangle$. Легко бачити, що V_0 є підмодулем $\mathbb{K}[x, y]$-модуля V і $\dim_{\mathbb{K}} V_0 \leq 5$. Візьмемо довільний $\mathbb{K}$-підмодуль $V_2 \subseteq V_1$ такий, що $V_1 = (V_0 \cap \cap V_1) \oplus V_2$ (такий підмодуль існує, тому що P і Q діють тривіально на V_1). Тоді $V = V_0 \oplus V_2$ — пряма сума $\mathbb{K}[x, y]$-підмодулів. Аналогічно розглянемо підмодуль $W_0 := \mathbb{K}\langle u_1 - u_3, w_3, S(u_1 - - u_3), S(w_3), T(u_1 - u_3)\rangle$ в W і візьмемо підмодуль W_2 в W_1 такий, що $W_1 = (W_0 \cap W_1) \oplus W_2$ (він існує, оскільки T і S діють тривіально на W_1). Тоді $W = W_0 \oplus W_2$ — пряма сума підмодулів, і $\mathbb{K}[x, y]$ діє тривіально на W_2. Крім того, $\dim_{\mathbb{K}} V_0 = \dim_{\mathbb{K}} W_0 \leq 5$ і $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = \dim_{\mathbb{K}} W_2$. Тому V_2 і W_2 — ізоморфні $\mathbb{K}[x, y]$-модулі. Якщо V та W не є слабко ізоморфними, то $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V_0 і W_0 також не є слабко ізоморфними. Ми бачимо, що модулі V і W є типу (ii) теореми.

Теорему 1 доведено.

Наступне твердження є безпосереднім наслідком попередніх результатів.

Теорема 2. *Нехай V і W — нерозкладні модулі над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$ і $L_V = \mathbb{K}\langle P, Q\rangle \leftthreetimes V$, і $L_W = \mathbb{K}\langle S, T\rangle \leftthreetimes W$ — асоційовані з ними алгебри Лі. Нехай $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W \geq 7$. $\mathbb{K}[x, y]$-модулі V і W слабко ізоморфні тоді і лише тоді, коли алгебри Лі L_V і L_W ізоморфні.*

Наслідок. *Задача класифікації скінченновимірних алгебр Лі вигляду $L = B \leftthreetimes A$ з абелевим ідеалом A і двовимірною абелевою підалгеброю B еквівалентна до задачі класифікації скінченновимірних $\mathbb{K}[x, y]$-модулів з точністю до слабкого ізоморфізму.*

Автори вдячні В. В. Сергейчуку за корисні обговорення та поради.

Література

1. *Belitskii G., Bondarenko V. M., Lipyanski R., Plachotnik V. V., Sergeichuk V. V.* The problems of classifying pairs of forms and local algebras with zero cube radical are wild // Linear Algebra and Appl. – 2005. – **402**. – P. 135 – 142.
2. *Belitskii G., Lipyanski R., Sergeichuk V. V.* Problems of classifying associative or Lie algebras and triples of symmetric or skew-symmetric matrices are wild // Linear Algebra and Appl. – 2005. – **407**. – P. 249 – 262.
3. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space // Funkc. Anal. i Prilozhen. – 1969. – **3**, № 4. – P. 81 – 82.
4. *Quillen D.* Projective modules over polynomial rings // Invent. Math. – 1976. – **36**. – P. 167 – 171.
5. *Suslin A.* Projective modules over polynomial rings are free // Transl. Soviet Math. – 1976. – **17**, № 4. – P. 1160 – 1164.

Одержано 24.01.17